Řešení DÚ
12. sada

(2.i) Spočtěte

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}},\ a,b>0.$$

Nejprve použijeme vzorec

(1) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)}$$

a stačí tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)}{x}.$$

Jelikož máme ve jmenovateli x, pak stačí určit Taylorův polynom stupně 1 čitatele v bodě $x=0$, tj. máme najít $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\ln\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right) = c_0 + c_1 x + o(x),\quad x\to 0,$$

Výraz v argumentu logaritmu se nabývá pro $x=0$ hodnoty 1 a tudíž Taylorův rozvoj do řádu jedna tohoto výrazu v bodě 0 je tvaru

$$\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x} = 1 + cx + o(x),\quad x\to 0,$$

kde c určíme později. Potom ze vztahu $\ln(1+y) = y + o(y)$ pro $y\to 0$ dostáváme

$$\ln\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right) = \ln(1+cx+o(x)) = cx + o(x),\quad x\to 0.$$

Tedy $c_0 = 0$, $c_1 = c$ a limita (1) je tudíž rovna e^c. Máme

$$\begin{aligned}(a^x+b^x) &= e^{a\ln x} + e^{b\ln x}\\ &= (1 + x\ln a + o(x)) + (1 + x\ln b + o(x))\\ &= 2 + x(\ln a + \ln b) + o(x),\quad x\to 0.\end{aligned}$$

Zbývá tedy najít c. Nyní najdme Taylorův polynom stupně jedna pro funkci $\frac{1}{a^x+b^x}$ v bodě $x=0$, tj. máme najít $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tak, aby $\frac{1}{a^x+b^x} = a_0 + a_1 x + o(x),\ x\to 0$. Koeficienty a_0, a_1 musí vyhovovat rovnici

$$\begin{aligned}1 &= \frac{a^x+b^x}{a^x+b^x}\\ &= (2 + x(\ln a+\ln b) + o(x))(a_0 + a_1 x + o(x))\\ &= 2a_0 + (2a_1 + a_0(\ln a + \ln b))x + o(x),\ x\to 0.\end{aligned}$$

Porovnáním obou stran dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}2a_0 \qquad\qquad &= 1,\\ (\ln a + \ln b)a_0 + 2a_1 &= 0.\end{aligned}$$

Tedy $a_0 = \frac{1}{2}$ a $a_1 = -\frac{\ln a + \ln b}{4}$. Odsud pak plyne, že

$$\begin{aligned}\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x} &= (e^{x^2\ln a} + e^{x^2\ln b})(\frac{1}{2} - \frac{\ln a+\ln b}{4}x + o(x))\\ &= (2+o(x))(\frac{1}{2} - \frac{\ln a+\ln b}{4}x + o(x))\\ &= 1 - \frac{\ln a+\ln b}{2}x + o(x),\quad x\to 0.\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že $c = -\frac{\ln a + \ln b}{2}$ a to znamená, že

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{\ln a+\ln b}{2}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$