Řešení DÚ
10. sada

(f) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$$

(1) Platí

$$-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1 \quad \Leftrightarrow -1 - x^2 \le 2x \le 1 + x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1 - x^2 - 2x \le 0 \ \wedge \ 0 \le 1 + x^2 - 2x \Leftrightarrow \quad -(1+x)^2 \le 0 \ \wedge \ 0 \le (1-x)^2.$$

Jelikož poslední sada nerovností platí vždy, pak $D(f) = \mathbb{R}$. Všimněte si, že $-(1+x)^2 = 0$ nebo $0 = (1-x)^2$ jen pro $x = \pm 1$.

(2) Funkce $g(x) = \arccos x$ i $h(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ jsou spojité, tudíž i $f = g \circ h$ je spojitá (na svém definičním oboru).

(3)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

(4) Funkce f není sudá, lichá ani periodická.

(5)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 1 \Leftrightarrow 2x = 1 + x^2 \Leftrightarrow 0 = (1-x)^2 \Leftrightarrow x = 1$$
$$f(0) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

(6) Připomeňme, že $g'(x)$ existuje jen pro $x \in (-1,1)$. Z bodu (1) tedy víme, že pro $x \neq \pm 1$ z věty o derivaci složené funkce platí

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} \\
&= -\frac{1+x^2}{\sqrt{1 + 2x^2 + x^4 - 4x^2}} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} \\
&= -2\frac{1-x^2}{|1-x^2|} \frac{1}{1+x^2} \\
&= \begin{cases} \frac{-2}{1+x^2}, & x \in (-1,1) \\ \frac{2}{1+x^2}, & x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty). \end{cases}
\end{aligned}$$

Vidíme, že $f'(x) \neq 0$ a že f je klesající na $(-1,1)$ a rostoucí na $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Dále z věty o limitě jednostranné derivace máme

$$\begin{aligned}
f'_+(1) &:= \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 1, \\
f'_-(1) &:= \lim_{x \to 1^-} f'(x) = -1, \\
f'_+(-1) &:= \lim_{x \to -1^+} f'(x) = -1, \\
f'_-(-1) &:= \lim_{x \to -1^-} f'(x) = 1.
\end{aligned}$$

Tudíž f nemá derivaci v bodech ± 1. Vidíme, že bod -1 je bod lokálního i globální maxima , $f(-1) = \pi$, a že 1 je bod lokálního i globálního minima , $f(1) = 0$. Tudíž obor hodnot f je $H(f) = [0, \pi]$.

(7) Pro druhou derivaci platí

$$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2},\ x \in (-1,1),$$
$$f''(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2},\ x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty).$$

Tudíž f je konvexní na $(-\infty,-1)$ a na $(0,1)$. Je konkávní na $(-1,0)$ a na $(1,+\infty)$. Inflexní bod je jen jeden, a to $[0,\frac{\pi}{2}]$. Tečna má předpis $y(x) = f'(0)x + f(0) = -2x + \frac{\pi}{2}$.

(8) Asymptoty jsme spočetli už v bodě (3). Vidíme, že asymptota v $+\infty$ i v $-\infty$ je přímka $y = \frac{\pi}{2}$.