Matematická analýza pro fyziky I
ZS 2021/22, MFF UK
Sada příkladů 10

HLUBŠÍ VLASTNOSTI FUNKCÍ

Lokální extrémy funkcí. Nalezněte lokální extrémy funkcí

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, $x \in \mathbb{R}$
b) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$
c) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$

Řešení: **a)** $x = 1, 3$, **b)** $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **c)** $\frac{1}{2}$,

Globální extrémy funkcí.

a) Dokažte následující nerovnosti:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},\ x, y > 0,\ 1 < p, q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ (Youngova nerovnost)}$$
$$\mathrm{e}^x > x + 1,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

b) Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 4x + 6$ na intervalu $[-3, 10]$.

c) Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x) = x\mathrm{e}^{-0.01x}$ na intervalu $(0, \infty)$.

d) ♠ Nádoba naplněná vodou se svislou stěnou výšky h stojí na vodorovné rovině. Vypočítejte výšku otvoru nádoby nad vodorovnou rovinou tak, aby voda stříkala co nejdále. (1 body)

e) ♠ Mezi dvěma svislými tyčemi, jejichž vzdálenost je d, je upevněna za konce niť délky l. Rozdíl výšek upevnění je h. Po niti může volně klouzat hmotný bod. Najděte rovnovážnou polohu bodu za podmínky, že potenciální energie má být minimální. (2 body)

Řešení: **b)** $\max f = f(10) = 66,\ \min f = f(2) = 2$, **c)** $\inf f = 0,\ \sup f = \max f = f(100) = 100e^{-1}$

Monotónie funkcí.

a) Nalezněte intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^n\mathrm{e}^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$, rostoucí a klesající.

b) Pro atomové teplo prvku platí

$$C_v = 3R\frac{x^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2},$$

kde $x = \frac{T^*}{T}$, T je absolutní teplota v kelvinech, T^* je tzv. charakteristická teplota a R je plynová konstanta. Dokažte, že atomové teplo prvku je rostoucí funkce absolutní teploty T.

Řešení: **a)** pro n sudé: klesající na $(-\infty, 0)$ a na $(n, +\infty)$ a rostoucí na $(0, n)$; pro n liché: rostoucí na $(-\infty, n)$ a klesající na $(n, +\infty)$

Konvexita, konkávnost. Nalezněte intervaly, kde je funkce konvexní/konkávní, a najděte inflexní body

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$
b) $f(x) = x \sin \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$

Řešení: **a)** konvexní na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ a na $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$, konkávní na $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, inflexní body: $\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$
b) konvexní na $(e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}, e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi})$ a konkávní na $(e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}, e^{\frac{9\pi}{4}+2k\pi})$, inflexní body: $e^{\frac{\pi}{4}+k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

a) Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n,$$

kde $x, y > 0$, $x \neq y$, $n > 1$ a vysvětlete její geometrický význam.