

Matematická analýza pro fyziky I
ZS 2021/22, MFF UK
Sada příkladů 9

Limita posloupnosti.

(1) Vypočítejte

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1} + \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6-6n^5+2} + \sqrt[5]{n^7+n^3+1}}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!}, a \in \mathbb{R}$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$, $n \geq 1$

f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, kde $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$, $n \geq 1$

Řešení: **a)** 1 **b)** 0, **c)** 1, **d)** 1, **e)** 2, **f)** 1

(2) Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ existuje $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin nx$.

Řešení: jen pro $x = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

(3) Najděte $\limsup_{n \rightarrow +\infty}$ a $\liminf_{n \rightarrow +\infty}$

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2}{3}n\pi$

b) $a_n = n(2 + (-1)^n)$

c) $a_n = \cos^n \frac{2}{3}n\pi$

Řešení: **a)** $1, -\frac{1}{2}$, **b)** $+\infty, +\infty$, **c)** $1, 0$

(4) Najděte hromadné body následujících posloupností

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots$

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$

Řešení: **a)** 0, 1, **b)** $[0, 1]$