

Matematická analýza pro fyziky I
ZS 2021/22, MFF UK
 Sada příkladů 6

Primitivní funkce I. Nalezněte následující primitivní funkce na maximálních možných intervalech. Určete i tyto intervaly.

Základní integrály.

- | | |
|---|---|
| a) $\int (x^4 + 3x^3 + 2x) \, dx$ | b) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$ |
| c) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$ | d) $\int \tan^2 x \, dx$ |
| e) $\int \cos^2 x \, dx$ | |

Výsledky¹: **a)** $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} + x^2$, **b)** $x - 1/x - 2 \ln |x|$, **c)** $2^{-x}/(5 \ln 2) - 2 \cdot 5^{-x}/\ln 5$, **d)** $\tan x - x$, **e)** $(x + \sin x \cos x)/2$.

Integrály na substituce.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a) $\int \frac{1}{x^2 - x + 2} dx$ | b) $\int x e^{-x^2} dx$ |
| c) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ | d) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ |
| e) $\int \tan x dx$ | f) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2} dx$ |
| g) $\int \sqrt{1+x^2} dx$ | h) $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$ |
| i) $\int \frac{1}{\sin x} dx$ | |

Výsledky: **a)** $2 \arctan((2x-1)/\sqrt{7})/\sqrt{7}$, **b)** $-e^{-x^2}/2$, **c)** $\arctan e^x$, **d)** $\ln^3 x/3$, **e)** $-\ln |\cos x|$, **f)** $-1/\arcsin x$, **g)** $(x\sqrt{1+x^2} + \ln |\sqrt{1+x^2} + x|)/2$, **h)** $\tan(x/2)$, **i)** $\ln(\tan \frac{x}{2})$.

Integrály na metodu per partes. V příkladech g) a h) nalezněte rekurentní vztah.

- | | |
|---|--|
| a) $\int e^x(x^3 + 2x + 1) dx$ | b) $\int e^{3x} \cos 2x dx$ |
| c) $\int x^3 a^{-x^2} dx, a > 0$ | d) $\int \ln x dx$ |
| e) $\int x \arctan(x+1) dx$ | f) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ |
| g) ♠ $\int x^2 \arccos x dx$ | (1 bod) h) $I_n := \int \cos^n x dx, n \in \mathbb{N}$ |
| i) $J_n := \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, n \in \mathbb{N}$ | |

Výsledky: **a)** $e^x(x^3 - 3x^2 + 8x - 7)$, **b)** $e^{3x}(2 \sin 2x + 3 \cos 2x)/13$, **c)** $-\frac{a^{-x^2}(x^2 \ln a + 1)}{2 \ln^2 a}$, **d)** $x \ln x - x$, **e)** $\frac{1}{2}(x^2 \arctan(1+x) - x + \ln(x^2 + 2x + 2))$, **f)** $x \tan x + \ln |\cos x|$, **h)** $I_n = \frac{n-1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{1}{n} I_{n-2}$, **i)** $J_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} J_n$.

Příklady označené ♠ můžete odevzdávat na dalším cvičení jako domácí úkol. Body za dŭ se počítají do aktivity za cvičení.

¹Výsledky jsou bez aditivní konstanty