

Matematická analýza pro fyziky I
ZS 2021/22, MFF UK
 Sada příkladů 4

Limity funkcí II. Základní limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Pravidlo pro výpočet limit typu “ 1^∞ ”:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x))}.$$

Příklady.

a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tga}}{x - a}, \quad a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x^2)}}{1 - \cos x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin nx}{\sin mx}, \quad n, m \in \mathbb{N}$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(2x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) + \ln(a-x) - 2 \ln a}{x^2}, \quad a > 0$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + ax))}{\sin bx}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0$

k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x \ln a) \ln\left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}}\right), \quad a > 0$

l) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2$

m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$

o) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

p) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

q) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x^\alpha}{\sin \pi x^\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0$

r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq \beta$

s) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}, \quad a > 0$

t) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x2^x}{1 + x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

u) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x}\right)^{\frac{1}{x}}, \quad a, b > 0$

Výsledky:

a) $\frac{1}{\cos^2 a}$, **b)** $\sqrt{2}$, **c)** $\frac{1}{2}$, **d)** $(-1)^{n+m} \frac{n}{m}$, **e)** $\frac{1}{2}$, **f)** $\sqrt{2}$, **g)** 1, **h)** $\frac{a^2}{b^2}$, **i)** $-a^{-2}$, **j)** $2\frac{a}{b}$, **k)** $2 \ln a$, **l)** $-\ln 2$, **m)** e , **n)** \sqrt{e} , **o)** $e^{-\frac{1}{2}}$, **p)** e^{-1} , **q)** $\frac{\alpha}{\beta}$, **r)** 1, **s)** $a^a(\ln a - 1)$, **t)** $\frac{2}{3}$, **u)** $\frac{1}{\sqrt{ab}}$.