Matematická analýza pro fyziky I
ZS 2021/22, MFF UK
Sada příkladů 2

Matematická indukce. Dokažte matematickou indukcí následující rovnosti a nerovnosti pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

a)
$$2^n > n$$

b)
$$3^n > n^2$$

c)
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d)
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

e)
$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \text{ pokud } \; x \geq -2$$

f)
$$1 + \frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \leq n + \frac{1}{2}$$

g)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

h)
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$$

i)
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$

j)
$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

k)
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k; \; a, b \in \mathbb{R}$$

l) $\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$,
kde $x_k \in [0, \pi]$, $k = 1, 2, \cdots, n$

Supremum, infimum.

(1) U následujících množin nalezněte sup, inf, max a min (pokud existují). Ověřte z definice!

a) $M = (0, 1]$

b) $M = [0, 1]$

c) $M = (0, +\infty)$

d) $M = \left\{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{N}\right\}$

e) $M = \left\{0,5; 0,55; 0,555; \dots\right\}$

f) $M = \left\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 3\right\}$.

(2) Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Dokažte:

a) $\inf(-A) = -\sup A$

b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

c) $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$

d) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$, pokud A, B obsahují pouze nezáporné prvky.

Zde definujeme množiny

$$-A = \{-x;\ x \in A\},\ A + B = \{x + y;\ x \in A, y \in B\},$$
$$A - B = \{x - y;\ x \in A, y \in B\},\ A \cdot B = \{x.y;\ x \in A, y \in B\}$$

(3) Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Lze obecně vyjádřit $\sup(A \cup B)$ a $\sup(A \cap B)$ pomocí $\sup A$ a $\sup B$?

(4) Nechť M je neprázdná množina a nechť f, g jsou omezené funkce $M \to \mathbb{R}$. Dokažte, že

a) $\sup_{x\in M}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) + \sup_{x\in M} g(x)$. Musí platit rovnost?

b) $\sup_{x\in M}(f(x) + g(x)) \geq \sup_{x\in M} f(x) + \inf_{x\in M} g(x)$

c) $\sup_{x\in M}(f(x) - g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x\in M} g(x)$

Zde definujeme

$$\sup_{x\in M} f(x) = \sup\{f(x);\ x \in M\},$$
$$\inf_{x\in M} f(x) = \inf\{f(x);\ x \in M\},$$
$$\sup_{x\in M}(f(x) + g(x)) = \sup\{f(x) + g(x);\ x \in M\},$$
$$\sup_{x\in M}(f(x) - g(x)) = \sup\{f(x) - g(x);\ x \in M\}.$$