PŘÍKLADY Z LA
I. SEMESTR

PAVEL RŮŽIČKA

1. Soustavy lineárních rovnic

Příklad 1.1. *Určete kvadratickou funkci, jejíž graf prochází body* $(0, 2)$, $(1, 5)$ *a* $(-1, 1)$.

Řešení. Hledáme čísla a, b, c tak, aby dané tři body vyhovovaly rovnici

$$ax^2 + bx + c = y.$$

Po dosazení dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & c & = & 2, \\ a & + & b & + & c & = & 5, \\ a & - & b & + & c & = & 1 \end{array}$$

Z první rovnice dostáváme, že $c = 2$. Dosadíme do zbývajících rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & 2 & = & 5, \\ a & - & b & + & 2 & = & 1 \end{array}$$

a sečtením druhé a třetí rovnice dostaneme, že

$$2a + 4 = 6,$$

odkud plyne $a = 1$. Dosadíme do třetí rovnice:

$$1 - b + 2 = 1$$

a dostaneme $b = 2$. Dané tři body tedy leží na grafu jediné kvadratické funkce

$$y = x^2 + 2x + 2.$$

Cvičení 1.1. *Určete kvadratickou funkci, jejíž graf prochází body* $(1, -3)$, $(-1, -5)$ *a* $(2, -5)$.

Řešení. $y = -x^2 + x - 3$.

Příklad 1.2. *Určete souřadnice středu kružnice procházející body* $(0, 1)$, $(-1, 1)$ *a* $(2, 0)$.

Řešení. Obecná rovnice kružnice je

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2. \tag{1.1}$$

Pokud bychom hledali rovnici kružnice procházející trojicí daných bodů (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), dostali bychom po dosazení do rovnice (1.1) soustavu

$$\begin{array}{ccccc}
(x_1-a)^2 & + & (y_1-b)^2 & = c^2, \\
(x_2-a)^2 & + & (y_2-b)^2 & = c^2, \\
(x_3-a)^2 & + & (y_3-b)^2 & = c^2.
\end{array}$$

Tuto soustavu upravíme podobně jako v Úloze 1.2.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_1^2 & - & x_2^2 & - & 2(x_1-x_2)a & + & y_1^2 & - & y_2^2 & - & 2(y_1-y_2)b & = 0, \\
x_2^2 & - & x_3^2 & - & 2(x_2-x_3)a & + & y_2^2 & - & y_3^2 & - & 2(y_2-y_3)b & = 0, \\
x_3^2 & - & 2x_3a & + & a^2 & + & y_3^2 & - & 2y_3b & + & b^2 & = c^2.
\end{array}$$

Pro naše konkrétní body mají první dvě rovnice výsledné soustavy tvar

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
0^2 & - & (-1)^2 & - & 2(0-(-1))a & + & 1^2 & - & 1^2 & - & 2(1-1)b & = 0, \\
(-1)^2 & - & 2^2 & - & 2((-1)-2)a & + & 1^2 & - & 0^2 & - & 2(1-0)b & = 0,
\end{array}$$

odkud

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
-1 & - & 2a & & & & & = 0, \\
-3 & + & 6a & + & 1 & - & 2b & = 0.
\end{array}$$

Z první rovnice dostaneme, že $a=-1/2$ a po dosazení do druhé z rovnic $b=-5/2$. □

Cvičení 1.2. *Určete rovnici kružnice, která prochází body* $(-3,0)$, $(3,0)$ *a* $(0,1)$.

Řešení. $x^2+(y+4)^2=5^2$.

Cvičení 1.3. *Určete rovnici kružnice, která prochází body* $(-1,0)$, $(1,-1)$ *a* $(3,-2)$.

Řešení. Body leží na přímce.

Příklad 1.3. *Nalezněte parametrické vyjádření roviny* ρ *určené rovnicí*

$$x-y+2z=1. \tag{1.2}$$

Řešení. Položíme $y=s$ a $z=t$. Po dosazení do rovnice (1.2) dostaneme

$$\begin{aligned}
x &= 1+s-2t, \\
y &= s, \\
z &= t
\end{aligned}$$

a máme tedy

$$(x,y,z)=(1,0,0)+(1,1,0)s+(-2,0,1)t.$$

Parametrické vyjádření dané roviny je

$$\rho = \{\mathbf{u} + s\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid s,\ t \in \mathbf{R}\},$$

kde $\mathbf{u} = (1,0,0)$, $\mathbf{v} = (1,1,0)$, $\mathbf{w} = (-2,0,1)$. □

Cvičení 1.4. *Nalezněte parametrické vyjádření přímky p určené rovnicí*

$$x - y = 1.$$

Řešení. $p = \{\mathbf{u} + \mathbf{v}t \mid t \in \mathbf{R}\}$, kde $\mathbf{u} = (1,0)$ a $\mathbf{v} = (1,1)$.

Cvičení 1.5. *Nalezněte parametrické vyjádření rovin určených rovnicemi*

(1) $\rho_1 : x + y + z = 1,$
(2) $\rho_2 : x - y = 1,$
(3) $\rho_3 : z = 1.$

Řešení. Hledaná parametrická vyjádření jsou:

(1) $\rho_1 = \{\mathbf{u} + \mathbf{v}s + \mathbf{w}t \mid s,\ t \in \mathbf{R}\}$, kde $\mathbf{u} = (1,0,0)$, $\mathbf{v} = (-1,1,0)$, $\mathbf{w} = (-1,0,1)$,
(2) $\rho_2 = \{\mathbf{u} + \mathbf{v}s + \mathbf{w}t \mid s,\ t \in \mathbf{R}\}$, kde $\mathbf{u} = (1,0,0)$, $\mathbf{v} = (1,0,1)$, $\mathbf{w} = (0,0,1)$ a
(3) $\rho_3 = \{\mathbf{u} + \mathbf{v}s + \mathbf{w}t \mid s,\ t \in \mathbf{R}\}$, kde $\mathbf{u} = (0,0,-1)$, $\mathbf{v} = (1,0,0)$, $\mathbf{w} = (0,1,0)$.

2. Gaussova eliminace

Příklad 2.1. *Určete všechna řešení homogenní soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = & 0. \end{array} \tag{2.1}$$

Řešení. Zapíšeme matici řešené soustavy,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a upravíme ji pomocí elementárních řádkových úprav do řádkově odstupňovaného tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -4 & 5 \\ 0 & -5 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{-5} & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soustava (2.1) je *ekvivalentní* soustavě

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ & - & 5x_2 & - & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 0, \end{array} \tag{2.2}$$

jejíž řešení určíme zpětnou substitucí.

Pivoty v matici soustavy (2.2), jsou označeny tučně, leží v prvním a druhém sloupci. Proto jsou neznámé x_1, x_2 *bázové*. Zbylé neznámé, x_3, x_4, jsou *volné*. Položíme

$$x_3 = a, \quad x_4 = b.$$

Ze druhé rovnice soustavy (2.2) dostaneme

$$-5x_2 - 4a + 5b = 0, \text{ odkud}$$
$$x_2 = b - \frac{4}{5}a.$$

Dosazením do první rovnice soustavy (2.2) dostaneme

$$x_1 + 2(b - \frac{4}{5}a) + a - b = 0, \text{ odkud}$$
$$x_1 = \frac{3}{5}a - b.$$

Obecné řešení soustavy (2.2) je možné zapsat také ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} b,$$

kde a, $b \in \mathbf{R}$. □

Příklad 2.2. *Určete všechna řešení soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0. \end{array} \tag{2.3}$$

Řešení. Zapíšeme matici soustavy (2.3),

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

a upravíme ji pomocí elementárních řádkových úprav do řádkově odstupňovaného tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

V tomto případě jsou všechny neznámé bázové a homogenní soustava má jen triviální řešení $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. □

Cvičení 2.1. *Určete všechna řešení homogenní soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0, \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ -x_1 & + & 7x_2 & + & 12x_3 & = & 0. \end{array}$$

Řešení. $(x_1, x_2, x_3)^T = (1, -5, 3)^T a$, kde $a \in \mathbf{R}$.

Cvičení 2.2. *Určete všechna řešení homogenní soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0. \end{array}$$

Řešení. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Cvičení 2.3. *Najděte všechna řešení homogenní soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & = & 0, \\ x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & & & = & 0. \end{array}$$

Nejprve zvolte jako volnou proměnnou x_3, pak x_4. Výsledky porovnejte.

Řešení. $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (1/3, 2, -1/3, 1)^T a$, kde $a \in \mathbf{R}$, pokud je volíme x_4 jako volnou proměnnou, a $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (-1, -6, 1, -3)^T a$, kde $a \in \mathbf{R}$, pokud volíme x_3 volnou proměnnou.

Cvičení 2.4. *Najděte všechna řešení homogenní soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & & & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & - & 5x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & & = & 0. \end{array}$$

Postupně zvolte jako volné proměnné x_3, x_4, potom x_2 a x_4 a nakonec x_2 a x_3. Zamyslete se nad tím, jak spolu souvisí získané výsledky.

Řešení. $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (-3, 1, 1, 0)^T a + (-1, -1, 0, 1)^T b$, kde $a,\ b \in \mathbf{R}$, jsou-li x_3, x_4 volné proměnné, $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (-3, 1, 1, 0)^T a + (-4, 0, 1, 1)^T b$, kde $a,\ b \in \mathbf{R}$, jsou-li x_2, x_4 volné proměnné, $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (1, 1, 0, -1)^T a + (-4, 0, 1, 1)^T b$, kde $a,\ b \in \mathbf{R}$, jsou-li x_2, x_3 volné proměnné.

Příklad 2.3. *Určete všechna řešení soustavy rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & -1. \end{array} \tag{2.4}$$

Řešení. Nejprve upravíme rozšířenou matici soustavy (2.4) do řádkově odstupňovaného tvaru:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

Zvolíme x_3 volnou proměnou a položíme $x_3 = a$. Zpětnou substitucí dopočítáme zbylé vázané neznámé.

$$\begin{aligned} -6a + x_4 &= 1, \\ x_4 &= 1 + 6a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 + 3a + (6a - 4) &= 2, \\ x_2 + 9a &= 6, \\ x_2 &= 6 - 9a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2(6 - 9a) - a + 2(6a - 4) &= 1, \\ x_1 + 4 - 7a &= 1, \\ x_1 &= 7a - 3. \end{aligned}$$

Řešení soustavy (2.4) můžeme popsat také takto:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} a.$$

□

Problém 2.5. *V Příkladě 2.3 zvolte x_4 jako volnou proměnnou (proměnné x_1, x_2 a x_3 jsou bázové) a znovu proveďte zpětnou substituci. Porovnejte oba výpočty.*

Příklad 2.4. *Určete všechna řešení soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & -1, \\ & - & x_2 & & & - & x_4 & = & 4, \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & 1, \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 5. \end{array} \tag{2.5}$$

Řešení. Podobně jako v Příkladu 2.3 upravíme rozšířenou matici soustavy (2.5) do řádkově odstupňovaného tvaru

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{4} & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right).$$

Pivoty ve výsledné matici jsme označili tučně. Vidíme, že sloupec pravých stran matice soustavy (2.5) je jejím bázovým sloupcem (v řádkově odstupňovaném tvaru je v tomto sloupci pivot) a tedy podle Věty 2.6 nemá soustava (2.5) řešení. □

Cvičení 2.6. *Určete všechna řešení soustavy rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 2. \end{array}$$

Řešení. $x_1 = 5/8,\ x_2 = 1/4,\ x_3 = 1/8.$

Cvičení 2.7. *Určete všechna řešení soustavy rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & 4, \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 2, \\ 3x_1 & - & 2x_3 & & & - & 2x_4 & = & 4. \end{array}$$

Řešení. $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (2, 1, 1, 0)^T + (0, 1, -1, 1)^T a$, kde $a \in \mathbf{R}$.

Cvičení 2.8. *Určete všechna řešení soustavy rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 3, \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 3, \\ & - & x_2 & & & - & x_4 & = & 0. \end{array}$$

Řešení. Soustava nemá řešení.

Příklad 2.5. *Pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminace vyřešte následující soustavu lineárních rovnic.*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & & & = & 2, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 1, \\ & & 2x_2 & - & 6x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 5. \end{array} \tag{2.6}$$

Řešení. Symbolem $\mathbf{A}$ označíme rozšířenou matici soustavy (2.6) a upravíme ji do redukovaného řádkově odstupňovaného tvaru (který označíme $\mathbf{E_A}$):

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -9 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \mathbf{E_A}.$$

Tučně jsme vyznačili pivoty matice $\mathbf{E_A}$. Bázové proměnné soustavy (2.6) jsou x_1, x_2 a x_4, jediná volná proměnná je x_3. Položíme $x_3 = a$ a přímo z matice $\mathbf{E_A}$ určíme, že $x_1 = 3 - 2a$, $x_2 = 1 + 3a$, $x_4 = 2$. Podobně jako v předchozích příkladech zapíšeme řešení ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} a.$$

□

Příklad 2.6. *Určete všechna řešní soustavy rovnic*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = 1, \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = 2, \\
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & \dots & + & x_n & = 3, \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = \vdots, \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & 2x_n & = n.
\end{array} \tag{2.7}
$$

Řešení. Rozšířená matice soustavy (2.7) je

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 1 & 1 & \dots & 2 & n
\end{array}\right).
$$

K prvnímu řádku postupně přičteme druhý až n-tý řádek. Dostaneme

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
(n+1) & (n+1) & (n+1) & \dots & (n+1) & \frac{n(n+1)}{2} \\
1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \dots & 2 & n
\end{array}\right).
$$

První řádek vydělíme $n+1$ a odečteme jej od ostatních řádků. Dostaneme matici

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{n}{2} \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2-\frac{n}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & n-\frac{n}{2}
\end{array}\right).
$$

Nakonec odečteme od první řádku součet ostatních řádků:

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\frac{n}{2} \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2-\frac{n}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & n-\frac{n}{2}
\end{array}\right).
$$

Řešením soustavy (2.6) je posloupnost $x_i = i - n/2$, kde $i = 1, \dots, n$. □

Cvičení 2.9. *Určete všechna řešení následující soustavy rovnic.*

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & (n-1)x_{n-1} & + & nx_n & = n \\
x_1 & & & + & 3x_3 & + & \dots & + & (n-1)x_{n-1} & + & nx_n & = n-2 \\
x_1 & + & 2x_2 & & & + & \dots & + & (n-1)x_{n-1} & + & nx_n & = n-3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & = \vdots \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \dots & + & (n-1)x_{n-1} & + & & = 0.
\end{array}
$$

Řešení. $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1, x_1 = \frac{-(n-2)(n+1)}{2}$.

Cvičení 2.10. *V závislosti na parametrech a, b řešte soustavu rovnic*

$$\begin{array}{rrrrrl} 2x_1 - & x_2 & & & & = a \\ -x_1 + & 2x_2 - & x_3 & & & = 0 \\ & - x_2 + & 2x_3 - & x_4 & & = 0 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & - x_{n-2} + & 2x_{n-1} - & x_n & = 0 \\ & & & - x_{n-1} + & 2x_n & = b. \end{array}$$

Řešení. $x_k = a - k\frac{a-b}{n+1}$, $k = 1, \dots, n$.

3. Počítání s maticemi

Příklad 3.1. *K reálné matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

určete matici inverzní.

Řešení. Naším úkolem je najít matici $\mathbf{X}$ takovou, že $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_3$. Pro $1 \le j \le 3$ označme $\mathbf{x}_j = \mathbf{X}_{*j}$ j-tý sloupcový vektor hledané matice $\mathbf{X}$. Sloupce matice $\mathbf{I}_3$ jsou tvořeny vektory $\mathbf{e}_j$ standardní báze prostoru $\mathcal{R}^3$. Proto je vektor $\mathbf{x}_j$ řešením soustavy rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j. \tag{3.1}$$

Při Gaussově-Jordanově eliminaci převedeme rozšířenou matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{e}_j)$ na matici $(\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{x}_j)$, která je již v redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru. Takto můžeme postupně najít všechny sloupce matice $\mathbf{X}$. Je však vidět, že upravíme-li rozšířenou matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_3)$ na řádkově odstupňovaný tvar, dostaneme přímo matici $(\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{X})$ (tak vlastně vyřešíme rovnici (3.1) pro všechna $(j = 1, 2, 3)$ současně).

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_3) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & 0 & 5 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -6 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -6 \end{array}\right) = (\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{X}).$$

Výpočtem se snadno přesvědčíme, že skutečně $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$. $\square$

Cvičení 3.1. *K reálné matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

určete matici inverzní.

Řešení.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problém 3.2. *Dokažte, že inverzní matice k matici* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ *existuje práve když* $D = ad - bc \neq 0$ *a má tvar* $\left(\begin{smallmatrix} d/D & -b/D \\ -c/D & a/D \end{smallmatrix}\right)$.

Cvičení 3.3. *K reálné matici*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

určete matici inverzní.

Řešení.

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 13 & -14 & 4 & 3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{11}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ -4 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 3.4. *Ke komplexní matici*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

určete matici inverzní.

Řešení.

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & 1 \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problém 3.5. *Buď n přirozené číslo. Symbolem* $\mathbf{e}_i$ *označme i-tý sloupcový vektor jednotkové matice* $\mathbf{I}_n$. *Rozmyslete si, že pro* $1 \leq i, j \leq n$ *je* $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T$ *matice, která má všude 0 jen na míste* i, j *má jedničku, a že pro každou čtvercovou matici* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *řádu n platí*

(1) $\mathbf{e}_i^T\mathbf{A} = \mathbf{A}_{i*}$;

(2) $\mathbf{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{A}_{*j}$;
(3) $\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\mathbf{e}_j = a_{ij}$.

Problém 3.6. *Tento problém najdete teké v přednáškách jako Cvičení 3.10. Buď* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *čtvercová matice řádu* n. *Postupně dokažte následující tvrzení:*

Shermanova-Morrisonova Woodburyho formule: *Nechť* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *jsou matice řádu* $n \times k$ *takové, že existuje inverzní matice k matici* $\mathbf{I}_k + \mathbf{D}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$. *Potom*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{D}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{I}_k + \mathbf{D}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{A}^{-1}.$$

Shermanova-Morrisonova formule: *Nechť* $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ *jsou sloupcové vektory dimenze* n *takové, že* $1 + \mathbf{d}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} \neq 0$. *Potom*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{c}\mathbf{d}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{d}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{d}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}}.$$

Speciální případ Shermanovy-Morrisonovy formule: *Nechť* $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \alpha\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T$, *tj. matice* $\mathbf{B}$ *se liší od matice* $\mathbf{A}$ *pouze v místě* i, j *ve kterém jsme přičetli číslo* α. *Označme* $\mathbf{A}^{-1} = (a'_{ij})$. *Potom, v případě, že* $\alpha a'_{ji} \neq -1$, *platí*

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \alpha\frac{[\mathbf{A}^{-1}]_{*i}[\mathbf{A}^{-1}]_{j*}}{1 + \alpha a'_{ji}}.$$

Příklad 3.2. *Pomocí Shermanovy-Morrisonovy formule a výsledku Cvičení 3.4 určete inverzní matici ke komplexní matici*

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & i & i \end{pmatrix}.$$

Správnost výsledku ověřte přímým výpočtem.

Řešení. Uvažme matici

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

ze Cvičení 3.4. Platí $\mathbf{D} = \mathbf{C} - i\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^T$ a podle speciálního případu *Shermanovy-Morrisonovy formule* je

$$\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} - i\frac{[\mathbf{C}^{-1}]_{*3}[\mathbf{C}^{-1}]_{3*}}{1 + ic'_{33}}. \tag{3.2}$$

kde $\mathbf{C}^{-1} = (c'_{ij})$. Matici $\mathbf{C}^{-1}$ jsme spočítali ve Cvičení 3.4:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & 1 \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dosazením do formule (3.2) dostaneme, že

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & 1 \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + i \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{1 + i.(-1)}.$$

Výsledná matice je tedy

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & \frac{i+1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{i+1}{2} & 0 & -\frac{i+1}{2} \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 3.3. *Řešte rovnici*

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C}, \tag{3.3}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad a \; \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

jsou reálné matice.

Řešení. Rovnice (3.3) nemá obecně řešení, ale je řešitelná vždy, když je matice **A** regulární. V našem případě, jak lze snadno ověřit, tomu tak je.

Nyní od obou stran rovnice (3.3) odečteme matici **B**. Dostaneme rovnici

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{C} - \mathbf{B}. \tag{3.4}$$

První možností jak určit matici **X** je vynásobit rovnici (3.4) maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zleva. Potom dostaneme

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{C} - \mathbf{B}).$$

Druhý způsob řešení spočívá v úpravě rozšířené matice $(\mathbf{A} \mid \mathbf{C} - \mathbf{B})$ pomocí elementárních řádkových úprav do redukovaného řádkově odstupňovaného tvaru. Výsledkem bude matice $(\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{X})$ (ověřili jsme, že je matice **A** regulární).

Úlohu vyřešíme druhým způsobem. Nejprve spočítáme matici $\mathbf{C}-\mathbf{B}$:

$$\mathbf{C}-\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nyní upravíme rozšířenou matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{C}-\mathbf{B})$ do redukovaného řádkově odstupňovaného tvaru:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \mid \mathbf{C}-\mathbf{B}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) = (\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{X}).
\end{aligned}$$

Odtud dostaneme, že

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme, že tímto druhým způsobem určíme řešení rovnice (3.3), pokud existuje, i v případě, že matice $\mathbf{A}$ není regulární. $\square$

Cvičení 3.7. *Nalezněte reálnou matici* $\mathbf{Y}$ *tak aby platilo, že*

$$\mathbf{Y}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.4. *Nechť* $0 \le i \ne j \le n$, $d \ne 0$ *a* b *je libovolné. Ověřte, že potom*

(1) $\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$;
(2) $\mathbf{E}_i(d)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{d})$;
(3) $\mathbf{E}_{ij}(b)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-b)$.

Řešení 1. Připomeňme, že symbolem $\mathbf{e}_i$ značíme i-tý vektor jednotkové matice a pro $1 \leq i, j \leq n$ je $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T$ matice, která má všude nuly kromě pozice i, j, kde má jedničku. Podle definice je

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{ij} &= \mathbf{I}_n - \mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T - \mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^T + \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i^T;\\
\mathbf{E}_i(d) &= \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mathbf{e}_j\mathbf{e}_j^T + d\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T;\\
\mathbf{E}_{ij}(b) &= \mathbf{I}_n + b\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T.
\end{aligned}$$

Důkaz dokončíme snadno přímým výpočtem s využitím vztahu

$$(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T)(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l^T) = \begin{cases} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_l^T & : j = k \\ 0 & : j \neq k, \end{cases}$$

pro $1 \leq i, j, k, l \leq n$. □

Řešení 2. Násobení maticí $\mathbf{E}_{ij}$ zleva odpovídá prohození i-tého a j-tého řádku. Vynásobení součinem $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij}$ zleva tedy odpovídá prohození i-tého a j-tého řádku dvakrát za sebou, tím však získáme původní matici. Tedy pro každou matici $\mathbf{A}$ platí $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A} = \mathbf{A}$. Speciálně to platí pro matici $\mathbf{I}_n$, a proto

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij}\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n.$$

Násobení maticí $\mathbf{E}_i(d)$ odpovídá vynásobení i-tého řádku číslem d. Proto pro každou matici $\mathbf{A}$ platí $\mathbf{E}_i(1/d)\mathbf{E}_i(d)\mathbf{A} = \mathbf{A}$. Speciálně

$$\mathbf{E}_i(1/d)\mathbf{E}_i(d) = \mathbf{E}_i(1/d)\mathbf{E}_i(d)\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n.$$

V případě matice $\mathbf{E}_{ij}(b)$ postupojeme podobně. Ověření již ponecháme čtenáři. □

Příklad 3.5. *Rozložte matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

v součin elementárních matic.

Řešení. Pomocí elementárních úprav transformujeme matici $\mathbf{A}$ do řádkově odstupňovaného tvaru a souběžně sestrojíme posloupnost elementárních matic, které těmto úpravám odpovídají. Nejprve prohodíme první a druhý řádek. Této úpravě odpovídá násobení matice $\mathbf{A}$ elementární maticí $\mathbf{E}_{12}$. Dostame matici

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a platí $\mathbf{A}_1 = \mathbf{E}_{12}\mathbf{A}$. Nyní přičteme první řádek ke třetímu. Této úpravě odpovídá vynásobení matice $\mathbf{A}_1$ maticí $\mathbf{E}_{31}(1)$ zleva. Dostaneme matici

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a platí

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{E}_{31}(1)\mathbf{A}_1 = \mathbf{E}_{31}(1)\mathbf{E}_{12}\mathbf{A}.$$

V následujícím kroku odečteme dvojnásobek třetího řádku od prvního. Dostaneme matici

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a platí

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{E}_{13}(-2)\mathbf{A}_2 = \mathbf{E}_{13}(-2)\mathbf{E}_{31}(1)\mathbf{A}_1 = \mathbf{E}_{13}(-2)\mathbf{E}_{31}(1)\mathbf{E}_{12}\mathbf{A}.$$

Takto budeme pokračovat až dostaneme jednotkovou matici. Při vhodné volbě posloupnosti elementárních řádkových úprav dostaneme

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{E}_{12}(1)\mathbf{E}_2(1/2)\mathbf{E}_{23}(-1)\mathbf{E}_{13}(-2)\mathbf{E}_{31}(1)\mathbf{E}_{12}\mathbf{A}.$$

Inverzní matice k jednotlivým elementárním maticím v posloupnosti určíme podle Příkladu 3.4. Dostaneme

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_{12}\mathbf{E}_{31}(-1)\mathbf{E}_{13}(2)\mathbf{E}_{23}(1)\mathbf{E}_2(2)\mathbf{E}_{12}(-1).$$

□

Cvičení 3.8. *Na základě výsledku předchozího příkladu (bez počítání) určete posloupnost elementárních sloupcových úprav, které převádějí matici* $\mathbf{A}$ *na jednotkovou matici.*

Řešení. $\mathbf{I}_3 = \mathbf{A}\mathbf{E}_{12}(1)\mathbf{E}_2(1/2)\mathbf{E}_{23}(-1)\mathbf{E}_{13}(-2)\mathbf{E}_{31}(1)\mathbf{E}_{12}$.

Cvičení 3.9. *Rozložte matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

v součin elementárních matic a ověřte správnost výsledku.

Řešení. Například $\mathbf{A} = \mathbf{E}_{31}(1)\mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{32}(-2)\mathbf{E}_{23}(-1)\mathbf{E}_{12}(-1)\mathbf{E}_2(-1)$ (řešení není jednoznačné).

Cvičení 3.10. *Rozložte matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

v součin elementárních matic.

Řešení. Například $\mathbf{A} = \mathbf{E}_{23}(c)\mathbf{E}_{13}(b)\mathbf{E}_{12}(a)$ (řešení není jednoznačné).

Příklad 3.6. *Určete bázové sloupce matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Vyjádřete zbylé sloupce matice $\mathbf{A}$ *jako lineární kombinaci bázových sloupců.*

Řešení. Matici $\mathbf{A}$ převedeme pomocí elementárních řádkových úprav do redukovaného řádkově odstupňovaného tvaru. Dostaneme

$$\mathbf{E}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bázové sloupce jsou sloupce ve kterých jsou pivoty, tedy jsou to první, třetí a čtvrtý sloupec. Podle Tvrzení 3.16. platí pro každé $k = 1, \ldots, 5$, že

$$\mathbf{A}_{*k} = c_1\mathbf{A}_{*1} + c_3\mathbf{A}_{*3} + c_4\mathbf{A}_{*4}$$

právě když

$$[\mathbf{E}_{\mathbf{A}}]_{*k} = c_1[\mathbf{E}_{\mathbf{A}}]_{*1} + c_3[\mathbf{E}_{\mathbf{A}}]_{*3} + c_4[\mathbf{E}_{\mathbf{A}}]_{*4}.$$

Proto platí, že

$$\mathbf{A}_{*2} = 2\mathbf{A}_{*1}$$

a

$$\mathbf{A}_{*5} = -\mathbf{A}_{*1} + 2\mathbf{A}_{*3} + \mathbf{A}_{*4}.$$

□

Cvičení 3.11. *Určete bázové sloupce matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a vyjádřete ostatní její sloupce jako lineární kombinaci bázových.

Řešení. Bázové sloupce jsou první, druhý a čtvrtý. Platí $\mathbf{A}_{*3} = 2\mathbf{A}_{*1} + \mathbf{A}_{*2}$ a $\mathbf{A}_{*5} = 2\mathbf{A}_{*1} - \mathbf{A}_{*2} - 2\mathbf{A}_{*4}$.

4. Tělesa

Problém 4.1. *Ověřte, že pro komplexní číslo $\alpha = a + ib$ a každé nenulové komplexní číslo $\beta = c + id$ platí*

$$|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2, \qquad \frac{1}{\beta} = \frac{\overline{\beta}}{|\beta|^2} = \frac{c - id}{c^2 + d^2}.$$

Cvičení 4.2. *Zjednodušte*

$$\frac{3 + i2}{1 + i}, \qquad \frac{2 - i3}{3 + i2}.$$

Řešení. $\frac{5}{2} - \frac{i}{2}$, i.

Cvičení 4.3. *Nad tělesem komplexních čísel řešte soustavu rovnic*

$$\begin{array}{rcrcl} (1+i)x_1 & + & (3-i)x_2 & = & 3+i, \\ ix_1 & + & x_2 & = & i. \end{array}$$

Řešení. $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1$.

Cvičení 4.4. *Nad tělesem komplexních čísel řešte soustavu rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & (2-i)x_2 & + & ix_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & (4+4i)x_2 & - & x_3 & = & 1+i \\ (2-i)x_1 & + & (3+2i)x_2 & & & = & 1-i. \end{array}$$

Řešení. $x_1 = \frac{3-4a}{5} - i\frac{1+7a}{5}$, $x_2 = a$, $x_3 = \frac{1+12a}{5} + i\frac{6a-7}{5}$, kde $a \in \mathbf{C}$.

Příklad 4.1. *Nechť a, b jsou celá čísla a n je přirozené číslo. Řekneme, že a je kongruentní s b modulo n pokud $n \mid a - b$. Je-li a kongruentní s b modulo n, píšeme*

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Nechť a_1, a_2, b_1, b_2 jsou celá čísla taková, že $a_1 \equiv a_2 \pmod{n}$ a zároveň $b_1 \equiv b_2 \pmod{n}$. Dokažte, že potom

1. *$a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \pmod{n}$;*
2. *$a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \pmod{n}$;*
3. *$-a_1 \equiv -a_2 \pmod{n}$;*
4. *$a_1^k \equiv a_2^k \pmod{n}$, pro každé $k \in \mathbf{N}$.*

Řešení.

1. Protože $n \mid a_1 - a_2$ a zároveň $n \mid b_1 - b_2$, platí, že $n \mid (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)$.
2. Protože $n \mid a_1 - a_2$ a zároveň $n \mid b_1 - b_2$, platí, že
$$n \mid (a_1 - a_2)b_1 + a_2(b_1 - b_2) = a_1 b_1 - a_2 b_2.$$
3. $a_1 - a_2 = (-a_2) - (-a_1)$.
4. $a_1^k - a_2^k = (a_1 - a_2)(a_2^{k-1} + a_1 a_2^{k-2} + \cdots + a_1^{k-2} a_2 + a_1^{k-1})$.

□

Problém 4.5. *Nechť a, b, c jsou celá čísla a n je přirozené číslo. Jsou-li čísla n a c nesoudělná, potom je*

$$a \equiv b \pmod{n} \qquad \text{právě když} \qquad ac \equiv bc \pmod{n}.$$

Dokažte!

V tomto problému tvrdíme, že při počítání s kongruencemi modulo n můžeme čísly nesoudělnými s číslem n násobit a dělit.

Příklad 4.2. *Řešte kongruenci* $29x \equiv 1 \pmod{17}$.

Řešení. Hledáme řešení $x \in \mathbf{Z}_{17} = \{0, 1, \dots, 16\}$. Kongruenci budeme upravovat podle pravidel popsaných v Příkladě 4.1 a v Problému 4.5:

$$29x \equiv 1 \pmod{17} \qquad \text{právě když} \qquad 12x \equiv 18 \pmod{17}.$$

Obě strany vydělíme číslem 6 (to můžeme udělat neboť 6 je nesoudělné s prvočíslem 17). Dostaneme

$$2x \equiv 3 \pmod{17} \qquad \text{odkud} \qquad 2x \equiv 20 \pmod{17}.$$

Nakonec obě strany vydělíme dvěma:

$$x \equiv 10 \pmod{17}.$$

Vidíme, že řešením jsou všechna čísla x tvaru $10 + 17t$, kde $t \in \mathbf{Z}$.

Cvičení 4.6. *Řešte kongruenci*

$$7x \equiv 15 \pmod{9}.$$

Řešení. $x = 6 + 9t$, $t \in \mathbf{Z}$.

Cvičení 4.7. *Řešte kongruenci*

$$14x \equiv 23 \pmod{31}.$$

Řešení. $x = 26 + 31t$, $t \in \mathbf{Z}$.

Příklad 4.3. *Dokažte, že číslo* $2^{60} + 7^{30}$ *je dělitelné číslem* 13.

Řešení. Opět budeme využívat pravidel popsaných v Příkladě 4.1 a Problému 4.5.

$$2^{60} \equiv 8^{20} \equiv (-5)^{20} \equiv 25^{10} \equiv (-1)^{10} \equiv 1 \pmod{13}$$

a zároveň

$$7^{30} \equiv 49^{15} \equiv (-3)^{15} \equiv -27^5 \equiv -1^5 \equiv -1 \pmod{13}.$$

Proto je $2^{60} + 7^{30} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{13}$.

Cvičení 4.8. *Určete zbytek po dělení čísla* 5^{20} *číslem* 26.

Řešení. 1

Problém 4.9. *Dokažte, že číslo* $2^{44} + 3^{22}2^{11}$ *je dělitelné číslem* 17.

Problém 4.10. *Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo* n *je* $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ *dělitelné sedmi.*

Cvičení 4.11. *Řešte nad tělesem* $\mathbf{Z}_5$ *soustavu rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & = 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = 0, \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = 0. \end{array}$$

Řešení. $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (4, 4, 1, 0)a + (3, 3, 0, 1)b$, kde a, $b \in \mathbf{Z}_5$.

Cvičení 4.12. *Řešte nad tělesem* $\mathbf{Z}_3$ *soustavu rovnic:*

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = 1, \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = 2, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = 1. \end{array}$$

Řešení. $x_1 = 1 + 2a, x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = a$, kde $a \in \mathbf{Z}_3$.

Cvičení 4.13. *V závislosti na parametrech* a_1, a_2, a_3, a_4 *řešte v* $\mathbf{R}$ *soustavu rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrl} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = a_1, \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = a_2, \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = a_3, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = a_4. \end{array}$$

Řešení. $x_k = \frac{\sum_{i+1}^4 a_i}{3} - a_k$.

Cvičení 4.14. *V závislosti na parametrech* a_1, a_2, a_3, a_4 *řešte v* $\mathbf{Z}_2$ *soustavu rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrl} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = a_1, \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = a_2, \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = a_3, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = a_4. \end{array}$$

Řešení. $x_1 = a_2 + a_3 + a_4$, $x_2 = a_1 + a_3 + a_4$, $x_3 = a_1 + a_2 + a_4$, $x_4 = a_1 + a_2 + a_3$.

Cvičení 4.15. *V závislosti na parametrech* a_1, a_2, a_3, a_4 *řešte v* $\mathbf{Z}_3$ *soustavu rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrl} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = a_1, \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = a_2, \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = a_3, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = a_4. \end{array}$$

Řešení. Soustava má řešení právě když $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$. V tom případě máme tři řešení $x_k = a_4 + 2a_k + j$, $k = 1, \dots, 4$, kde $j = 0, 1, 2$.

Cvičení 4.16. *K matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ *určete matici inverzní.*

Řešení.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 4.17. *Nalezněte matici* $\mathbf{Y}$ *nad tělesem* $\mathbf{Z}_3$ *takovou, že platí*

$$\mathbf{Y} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.4. *Určete polynom* $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *s koeficienty z tělesa* $\mathbf{Z}_5$*, který splňuje* $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 1$ *a* $f(4) = 1$.

Řešení. Koeficienty polynomu $f(x)$ jsou řešením soustavy rovnic jejíž matice je Vandermondova matice určená prvky 1, 2, 3, 4 tělesa $\mathbf{Z}_5$ rozšířená o pravou stranu danou předpisy definujícími polynom f. Vyřešíme tedy soustavu s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \tag{4.1}$$

nad tělesem $\mathbf{Z}_5$. Matici (4.1) upravíme pomocí elementárních úprav do řádkově odstupňovaného tvaru

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right),$$

odkud zpětnou substitucí dostaneme $a_0 = 4$, $a_1 = a_2 = a_3 = 3$, tj. $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3x + 4$. □

Cvičení 4.18. *Určete polynom $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ s koeficienty z tělesa $\mathbf{Z}_7$, který splňuje $f(1) = 5$, $f(2) = 0$, $f(3) = 6$ a $f(5) = 5$.*

Řešení. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

Cvičení 4.19. *Buď $f(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ polynom s koeficienty z tělesa $\mathbf{Z}_5$, který splňuje $f(1) = 4$, $f(2) = 2$, $f(3) = 2$ a $f(4) = 0$. Určete $f(0)$.*

Řešení. $f(0) = 2$.

5. Vektorové prostory

Příklad 5.1. *Rozhodněte, které z vektorů $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1, 0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (0, -1, -1, 1)^T$ leží v lineárním obalu vektorů $\mathbf{u}_1 = (0, 2, 1, 0)^T$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1, 1)^T$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, -1, 0)^T$, $\mathbf{u}_4 = (0, 4, 2, 1)^T$.*

Řešení. Označme symbolem $\mathbf{A}$ matici, jejíž sloupce tvoří vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$. Vektor $\mathbf{v}_i$ leží v lineárním obalu vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$ právě když je hodnost matice $\mathbf{A}$ rovna hodnosti rozšířené matice $(\mathbf{A} \mid \mathbf{v}_i)$. Označme $\mathbf{B}$ matici, jejíž sloupce jsou vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ a pravujme rozšířenou matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$ do řádkově odstupňovaného tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Vidíme, že $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A} \mid \mathbf{v}_1) = 3$, a $r(\mathbf{A} \mid \mathbf{v}_2) = r(\mathbf{A} \mid \mathbf{v}_3) = 4$. Proto v lineárním obalu vektorů $\mathbf{u}_1 = (0, 2, 1, 0)^T$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1, 1)^T$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, -1, 0)^T$, $\mathbf{u}_4 = (0, 4, 2, 1)^T$ leží pouze vektor $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 1)^T$. □

Cvičení 5.1. *Rozhodněte, které z vektorů $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 1, 0)^T$, $\mathbf{v}_2 = (2, 5, 1, -2)^T$, $\mathbf{v}_3 = (1, 4, 4, 3)^T$ leží v lineárním obalu vektorů $\mathbf{u}_1 = (1, 4, 2, -1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 0, -1)^T$, $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 1, 0)^T$, $\mathbf{u}_4 = (1, 1, -1, -1)^T$.*

Řešení. V daném lineárním obalu leží pouze vektor $\mathbf{v}_2$.

Příklad 5.2. *Rozhodněte, zda jsou lineární obal vektorů* $(1,2,1,3,5)^T$*,* $(0,1,0,-1,-3)^T$*,* $(1,0,1,1,3)^T$*,* $(0,1,0,1,1)^T$ *a lineární obal vektorů* $(1,2,1,0,-1)^T$*,* $(0,1,0,2,3)^T$*,* $(1,1,1,0,0)^T$ *shodné.*

Řešení 1. Označme $A = \{(1,2,1,3,5)^T, (0,1,0,-1,-3)^T, (1,0,1,1,3)^T, (0,1,0,1,1)^T\}$ a $B = \{(1,2,1,0,-1)^T, (0,1,0,2,3)^T, (1,1,1,0,0)^T\}$ množiny vektorů ze zadání. Uvažme matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ resp. } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jejichž nenulové řádky jsou tvořeny vektory z množiny A, resp. B. Lineární obaly množin A a B budou shodné právě když bude možné převést pomocí elementárních řádkových úprav matici $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{B}$. Podle Tvrzení 2.11 je možné převést elementárními řádkovými úpravami matice $\mathbf{A}$, resp. $\mathbf{B}$ na jednoznačně určené matice $\mathbf{E_A}$, resp. $\mathbf{E_B}$ v redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru. Odtud je patrné, že matici $\mathbf{A}$ je možné převést na matici $\mathbf{B}$ pomocí elementárních řádkových úprav právě když jsou matice $\mathbf{E_A}$ a $\mathbf{E_B}$ shodné. Upravme tedy matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ na redukovaný řádkově odstupňovaný tvar a výsledky porovnejme:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E_A};$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E_B}.$$

Vidíme, že nenulové řádky matic $\mathbf{E_A}$ a $\mathbf{E_B}$ jsou shodné a tedy jsou shodné i lineární obaly množin A a B.

Řešení 2. Uvažme opět matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a položme

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A}^T \mid \mathbf{B}^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 3 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozmyslete si, že lineární obaly množin A, B jsou shodné právě když platí $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{C})$. (Dokažte také, že z rovnosti $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{C})$ plyne, že $\mathcal{L}(B) \subseteq \mathcal{L}(A)$.) Hodnosti matic snadno spočítáme převedením na řádkově odstupňovaný tvar. □

Cvičení 5.2. *Rozhodněte, zda vektory* $(1,0,1,1,1)^T$, $(1,1,0,1,0)^T$, $(0,1,-1,0,1)^T$ *generují stejný podprostor prostoru* $\mathcal{R}^5$ *jako vektory* $(1,2,-1,1,0)^T$, $(-1,1,-2,-1,0)^T$ *a* $(0,-1,1,0,2)^T$.

Řešení. Ano, oba podprostory jsou shodné.

Cvičení 5.3. *Rozhodněte, zda vektory* $(1,1,0,1)^T$, $(0,1,0,1)^T$, $(0,1,1,0)^T$, $(1,1,1,0)^T$, $(0,0,1,1)^T$ *generují celý prostor* $\mathcal{R}^4$, *resp.* $\mathcal{Z}_2^4$.

Řešení. Dané vektory generují $\mathcal{R}^4$, ale negenerují $\mathcal{Z}_2^4$.

Cvičení 5.4. *Rozhodněte, zda vektory* $(2,3,2)^T$, $(1,1,-1)^T$ *tvoří bázi podprostoru vektorového prostoru* $\mathcal{R}^3$ *generovaného trojicí vektorů* $(1,2,3)^T$, $(5,8,7)^T$, $(3,4,1)^T$.

Řešení. Ano, vektory $(2,3,2)^T$, $(1,1,-1)^T$ tvoří bázi daného podprostoru.

6. Lineární (ne)závislost

Příklad 6.1. *Rozhodněte, zda je množina* $A = \{(1,2,-1,0)^T, (2,5,-1,3)^T, (4,1,-3,3)^T\}$ *lineárně nezávislá.*

Řešení. Uvažme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

jejíž sloupce jsou prvky množiny A. Množina A je lineárně nezávislá právě když je pro každý nenulový vektor $\mathbf{x}$ součin $\mathbf{Ax}$ nenulový. To platí právě tehdy když je hodnost matice $\mathbf{A}$ rovna počtu prvků množiny A. Upravíme matici $\mathbf{A}$ na řádkově odstupňovaný tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $r(\mathbf{A}) = 2$. Proto je množina A lineárně závislá. □

Cvičení 6.1. *Rozhodněte, které z těchto množin reálných vektorů jsou lineárně závislé.*

$$A = \left\{(1,2,1,1)^T, (-1,4,0,0)^T, (0,1,1,1)^T, (1,1,1,0)^T\right\},$$
$$B = \left\{(1,2,1)^T, (1,1,1)^T, (1,-2,1)^T, (0,1,1)^T\right\},$$
$$C = \left\{(1,-1,0,2,1)^T, (1,0,1,0,1)^T, (-1,1,2,-3,0)^T, (-2,0,0,-1,-1)^T\right\}.$$

Řešení. Jsou to množiny B a C.

Cvičení 6.2. *Rozhodněte, zda je množina* $A = \{(0,1,1,1)^T, (1,0,1,1)^T, (1,1,0,1)^T, (1,1,1,0)^T\}$ *reálných vektorů lineárně závislá. Rozhodněte, zda je množina A lineárně závislá jde-li o vektory nad tělesem $\mathbf{Z}_3$.*

Řešení. Množina A je lineárně nezávisla nad $\mathbf{R}$ a lineárně závislá nad $\mathbf{Z}_3$.

Příklad 6.2. *Určete báze prostorů $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ reálné matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení 1. Nejprve určíme báze podprostorů $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. Matici $\mathbf{A}$ převedeme na řádkově odstupňovaný tvar $\mathbf{A}'$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}'.$$

Nenulové řádky matice $\mathbf{A}'$ tvoří bázi podprostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, tj. $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\{(1,2,0,2,1)^T,\ (0,0,1,3,3)^T\}$. Podle definice je $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ podprostor všech řešení $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T$ soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\;\; + 2x_4 + x_5 \;\; &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 9x_4 + 6x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 + 5x_5 &= 0, \end{aligned}$$

která určíme z matice $\mathbf{A}'$ zpětnou substitucí. Zvolíme x_2, x_4 a x_5 volnými proměnnými a položíme $x_2 = a$, $x_4 = b$, $x_5 = c$. Dostaneme $x_3 = -3a - 3c$ a $x_1 = -2a - 2b - c$, odkud

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{(-2,1,0,0,0)^T a + (-2,0,-3,1,0)^T b + (-1,0,3,0,1)^T c \mid a,\ b,\ c, \in \mathbf{R}\}.$$

Vektory $(-2,1,0,0,0)^T$, $(-2,0,-3,1,0)^T$, $(-1,0,3,0,1)^T$ tvoří bázi prostoru $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Báze prostorů $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ určíme obdobně, když si uvědomíme, že $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}^T)$ a $\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$.

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

odkud vidíme, že dvojice vektorů $(1,3,2)^T$, $(0,1,1)^T$ tvoří bázi podprostoru $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ a zpětnou substitucí spočítáme, že $\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \{(1,-1,1)^T a \mid a \in \mathbf{R}\}$, tj. $\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\{(1,-1,1)^T\}$. $\square$

Řešení 2. Budeme postupovat podobně jako v Úloze 6.6. Na rozdíl od prvního řešení spočítáme nejprve současně podprostory $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{M}(\mathbf{A})$. Vezmeme rozšířenou matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_3)$ a pomocí elementárních řádkových úprav ji transformujeme tak, že matice v levé části je v řádkově odstupňovaném tvaru

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 9 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{array}\right).$$

Vektory odpovídající nenulovým řádkům v levé části upravené rozšířené matice tvoří bázi podprostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$. Řádek v pravé části upravené rozšířené matice, kterému odpovídá nulový řádek v levé části (vyznačen tučně) určuje, podle Tvrzení 6.15, vektor báze podprostoru $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, tj. $\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\{(1,-1,1)^T\}$.

Báze podprostorů $\mathcal{S}(\mathbf{A}), \mathcal{N}(\mathbf{A})$ určíme obdobně, když matici $\mathbf{A}$ nejdříve transponujeme.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right),$$

odkud vidíme, že množina $\{(1,3,2)^T, (0,1,1)^T\}$ tvoří bázi podprostoru $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ a množina $\{(-2,1,0,0,0)^T, (-2,0,-3,1,0)^T, (-1,0,-3,0,1)^T\}$ tvoří bázi podprostoru $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. $\square$

Cvičení 6.3. *Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ určených reálnou maticí*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Například (řešení samozřejmě není určeno jednoznačně) $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\{(1,0,1,-1,2)^T, (0,1,-3,4,-5)^T\}$, $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\{(1,3,4,1)^T, (0,1,1,1)^T\}$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\{(-1,3,1,0,0)^T, (1,-4,0,1,0)^T, (-2,5,0,0,1)^T\}$, $\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\{(-1,-1,1,0)^T, (2,-1,0,1)^T\}$.

Cvičení 6.4. *Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ určených maticí*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbf{Z}_5$.

Řešení. Například (řešení samozřejmě není určeno jednoznačně) $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\{(1,4,2,3)^T, (0,1,4,4)^T\}$, $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\{(1,3,3,3)^T, (0,2,4,0)^T\}$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\{(4,1,1,0)^T, (3,1,0,1)^T\}$, $\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\{(3,3,1,0)^T, (0,3,1,1)^T\}$.

Příklad 6.3. *Porovnejte řádkové, sloupcové, pravé a levé nulové prostory reálných matic* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$*, jestliže*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad a \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Prostory $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ jsou shodné právě když je možné pomocí elementárních řádkových úprav převést matici $\mathbf{A}$ na matici $\mathbf{B}$ a to je možné právě když jsou shodné prostory $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{N}(\mathbf{B})$. Tedy, $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ právě když $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{B})$. Podobně platí $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{B})$ právě když $\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \mathcal{M}(\mathbf{B})$. Stačí tedy porovnat řádkové a sloupcové prostory obou matic, což je úloha analogická Příkladu 5.2. Podobně jako v prvním řešení tohoto příkladu porovnáme redukované řádkově odstupňované tvary matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, resp. $\mathbf{A}^T$ a $\mathbf{B}^T$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_{\mathbf{A}};$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_{\mathbf{B}}.$$

Vidíme, že $\mathbf{E_A} = \mathbf{E_B}$, odkud plyne, že $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ a $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{B})$. Zbývá porovnat matice $\mathbf{E}_{\mathbf{A}^T}$ a $\mathbf{E}_{\mathbf{B}^T}$.

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_{\mathbf{A}^T};$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_{\mathbf{B}^T}.$$

V tomto případě nejsou matice $\mathbf{E}_{\mathbf{A}^T}$ a $\mathbf{E}_{\mathbf{B}^T}$ shodné a proto $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \neq \mathcal{S}(\mathbf{B})$ stejně jako $\mathcal{M}(\mathbf{A}) \neq \mathcal{M}(\mathbf{B})$. $\square$

Cvičení 6.5. *Porovnejte řádkové, sloupcové, pravé a levé nulové prostory matic* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *nad tělesem* $\mathbf{Z}_3$*, jestliže*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. $\mathcal{R}(\mathbf{A}) \neq \mathcal{R}(\mathbf{B})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \neq \mathcal{N}(\mathbf{B})$, $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{B})$ a $\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \mathcal{M}(\mathbf{B})$.

Problém 6.6. *Buď* $\mathbf{A}$ *reálná matice tvaru* $m \times n$*. Dokažte, že*

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

Návod. Využijte toho, že pro každý nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^n$ platí $\mathbf{v}^T\mathbf{v} \neq 0$.]

Problém 6.7. *Dokažte, že pro každou reálnou matici* $\mathbf{A}$ *tvaru* $m \times n$ *platí*

$$r(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A}). \tag{6.1}$$

Návod. Návod: Využijte Problém 6.7 a Tvrzení 6.19.

Problém 6.8. *Dokažte, že rovnost* (6.1) *neplatí pro matice nad tělesy konečné charakteristiky.*

Příklad 6.4. *Nechť* $\mathcal{X}$ *je lineární obal vektorů* $\mathbf{x}_1 = (1,0,1,1)^T$, $\mathbf{x}_2 = (2,1,3,1)^T$, $\mathbf{x}_3 = (0,-1,1,-1)^T$ *a* $\mathbf{x}_4 = (3,1,4,2)^T$, *nechť* $\mathcal{Y}$ *je lineární obal vektorů* $\mathbf{y}_1 = (1,0,1,2)^T$, $\mathbf{y}_2 = (1,1,0,3)^T$, $\mathbf{y}_3 = (1,-1,3,2)^T$ *a* $\mathbf{y}_4 = (0,1,-1,1)^T$. *Určete dimenze podprostorů* $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ *a* $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ *prostoru* $\mathbf{R}^4$.

Řešení. Podprostory $\mathcal{X}$, resp. $\mathcal{Y}$ vektorového prostoru $\mathbf{R}^4$ jsou rovny řádkovým prostorům matic

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \text{ resp. } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a proto $\dim \mathcal{X} = r(\mathbf{X})$ a $\dim Y = r(\mathbf{Y})$. Hodnosti matic $\mathbf{X}$, resp. $\mathbf{Y}$ určíme z jejich řádkově odstupňovaných tvarů $\widetilde{\mathbf{X}}$, resp. $\widetilde{\mathbf{Y}}$. Platí

$$\mathbf{X} \sim \widetilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a \qquad \mathbf{Y} \sim \widetilde{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a tedy $\dim \mathcal{X} = \dim \mathcal{Y} = 3$. Dále využijeme Tvrzení 6.22

$$\dim(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) + \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \dim(\mathcal{X}) + \dim(\mathcal{Y}) \tag{6.2}$$

Dimenze prostoru $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ je rovna hodnosti matice $\mathbf{Z}$ jejíž sloupce jsou tvořeny nenulovými řádky matic $\widetilde{\mathbf{X}}^T$ a $\widetilde{\mathbf{Y}}^T$ a tedy $\mathcal{S}(\mathbf{Z}) = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$. Hodnost matice $\mathbf{Z}$ určíme z opět jejího řádkově odstupňovaného tvaru.

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $r(\mathbf{Z}) = 4$ a tedy $\dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = 4$. Dosazením do vztahu (6.2) dostaneme, že $4+\dim(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) = 6$, odkud plyne, že $\dim(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) = 2$. □

Cvičení 6.9. *Nechť* $\mathcal{X} = \mathcal{L}\{(1,0,1,0)^T, (-2,1,-1,1)^T, (2,0,1,-1)^T, (1,1,3,2)^T\}$ *a* $\mathcal{Y} = \mathcal{L}\{(1,0,0,1)^T, (2,-1,0,1)^T, (1,3,1,0)^T, (4,-5,-1,3)^T\}$ *jsou podprostory vektorového prostoru* $\mathcal{R}^4$*. Určete dimenze* $\mathcal{X}$*,* $\mathcal{Y}$ *a dimenzi průniku prostorů* $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$*.*

Řešení. $\dim \mathcal{X} = \dim \mathcal{Y} = 3$, $\dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = 2$.

Cvičení 6.10. *Nechť* $\mathcal{X} = \mathcal{L}\{(1,0,2,1,3)^T, (-1,2,3,0,3)^T, (0,1,0,-3,3)^T, (-1,3,8,4,6)^T\}$ *a* $\mathcal{Y} = \mathcal{L}\{(-2,1,0,0,-6)^T, (0,-2,-2,4,-2)^T, (2,-3,-2,4,4)^T\}$ *jsou podprostory vektorového prostoru* $\mathcal{R}^5$*. Určete dimenze podprostorů* $\mathcal{X}$*,* $\mathcal{Y}$*,* $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ *a* $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$*.*

Řešení. $\dim \mathcal{X} = 3$, $\dim \mathcal{Y} = 2$, $\dim(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = 4$, $\dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = 1$.

Příklad 6.5. *Nechť* $\mathcal{X} = \{(1,-1,0)^T, (1,1,2)^T, (1,-3,-2)^T\}$ *a* $\mathcal{Y} = \{(1,2,-1)^T, (-1,2,0)^T, (0,4,-1)^T\}$ *jsou podprostory prostoru* $\mathcal{R}^3$*. Nalezněte bázi podprodstoru* $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$*.*

Řešení. Platí $\mathcal{X} = \mathcal{R}(\mathbf{X})$ a $\mathcal{Y} = \mathcal{R}(\mathbf{Y})$, kde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ upravíme na řádkově odstupňovaný tvar. Dostaneme

$$\mathbf{X} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a \qquad \mathbf{Y} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Položme $\mathbf{x}_1 = (1,-1,0)^T$, $\mathbf{x}_2 = (0,1,1)^T$, $\mathbf{y}_1 = (1,2,-1)^T$ a $\mathbf{y}_2 = (0,4,-1)^T$. Vektor $\mathbf{z}$ leží v průniku podprostorů $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ právě když existují skaláry a_1, a_2, b_1 a $b_2 \in \mathbf{R}$ takové, že $a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{z} = b_1\mathbf{y}_1 + b_2\mathbf{y}_2$. Řešme homogenní soustavu lineárních rovnic (s neznámými a_1, a_2, b_1, b_2).

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 - b_1\mathbf{y}_1 - b_2\mathbf{y}_2 = 0. \tag{6.3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zvolíme b_1 volnou proměnnou a položíme $b_1 = \alpha$. Zpětnou substitucí dostaneme řešení $b_2 = -\frac{4}{5}\alpha$, $b_1 = \alpha$, $a_2 = -\frac{1}{5}\alpha$, $a_1 = -\alpha$ soustavy (6.3). Průnik podprostorů $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ určíme z prvních dvou složek tohoto řešení.

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \{-\alpha(1,-1,0)^T + -\frac{\alpha}{5}(0,1,1)^T \mid \alpha \in \mathbf{R}\} = \{\beta(5,-4,1) \mid \beta \in \mathbf{R}\}.$$

Vidíme, že $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ je jednodimenzionální podprostor prostoru $\mathcal{R}^3$ a tedy libovolný nenulový vektor tohoto podprostoru tvoří jeho bázi; například $(5, -4, 1)^T$. □

Cvičení 6.11. *Nechť* $\mathcal{X} = \mathcal{L}\{(1,1,1,0)^T, (1,0,1,1)^T, (1,2,2,0)^T, (1,1,2,1)^T\}$ *a* $\mathcal{Y} = \mathcal{L}\{(1,2,0,1)^T, (0,0,1,2)^T, (2,1,0,1)^T, (1,2,0,0)^T\}$ *jsou podprostory prostoru* $\mathcal{Z}_3^4$. *Nalezněte bázi průniku* $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$.

Řešení. Například (báze není určena jednoznačně) $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathcal{L}\{(1,2,0,1)^T, (0,0,1,1)^T\}$.

7. Lineární zobrazení

Cvičení 7.1. *Rozhodněte, která z následujících zobrazení aritmetického vektorového prostoru* $\mathcal{R}^3$ *do aritmetického vektorového prostoru* $\mathcal{R}^4$ *jsou lineární.*

$$F_1((a,b,c)^T) = (a+b, b+c, a+c, 0)^T;$$
$$F_2((a,b,c)^T) = (a-b, 0, 1, a)^T;$$
$$F_3((a,b,c)^T) = (ab, c, a, b)^T;$$
$$F_4((a,b,c)^T) = (a, c, a, b)^T;$$
$$F_5((a,b,c)^T) = (a+b+c, a, b, c)^T;$$
$$F_6((a,b,c)^T) = (a+2, a-2, b, c)^T.$$

Řešení. Jsou to zobrazení F_1, F_4 a F_5.

Příklad 7.1. *Nechť* $\mathcal{A} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, *resp.* $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$, *jsou báze reálných vektorových prostorů* $\mathcal{U}$, *resp.* $\mathcal{V}$. *Buď* F *lineární zobrazení z prostoru* $\mathcal{U}$ *do prostoru* $\mathcal{V}$ *definované na prvcích báze* $\mathcal{A}$ *takto:*

$$F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4,\ F(\mathbf{u}_2) = 2\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3,\ F(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

Určete matici $[F]_{\mathcal{AB}}$ *a* $F(\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3)$.

Řešení. Nejprve určíme souřadnice obrazů vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ a $\mathbf{u}_3$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$:

$$[F(\mathbf{u}_1)]_{\mathcal{B}} = (1,1,1,1)^T,\ [F(\mathbf{u}_2)]_{\mathcal{B}} = (2,0,-2,0)^T,\ [F(\mathbf{u}_3)]_{\mathcal{B}} = (1,2,1,0)^T.$$

Podle definice je $[F]_{\mathcal{AB}} = ([F(\mathbf{u}_1)]_{\mathcal{B}} \mid [F(\mathbf{u}_2)]_{\mathcal{B}} \mid [F(\mathbf{u}_3)]_{\mathcal{B}})$ a tedy

$$[F]_{\mathcal{AB}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Položme $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$. Souřadnice vektoru $\mathbf{w}$ vzhledem k bázi $\mathcal{A}$ jsou rovny $(1, 2, -1)^T$ a podle Tvrzení 7.7 je

$$[F(\mathbf{w})]_{\mathcal{B}} = [F]_{\mathcal{AB}}[\mathbf{w}]_{\mathcal{A}}.$$

Po dosazení dostaneme

$$[F(\mathbf{w})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

odkud plyne, že $F(\mathbf{w}) = 4\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - 4\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$. □

Cvičení 7.2. *Nechť $\mathcal{A} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, resp. $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ jsou báze reálných vektorových prostorů $\mathcal{U}$, resp. $\mathcal{V}$. Nechť $F : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je lineární zobrazení definované na prvcích báze $\mathcal{A}$ předpisy*

$$F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4,\ F(\mathbf{u}_2) = 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4,\ F(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4.$$

Určete matici zobrazení F vzhledem k bázím $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a obraz vektoru $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$.

Řešení. $F(\mathbf{w}) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4$ a

$$[F]_{\mathcal{AB}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 7.3. *Nechť $\mathcal{A} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, resp. $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$, resp. $\mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$, jsou báze reálných vektorových prostorů $\mathcal{U}$, resp. $\mathcal{V}$, resp. $\mathcal{W}$. Nechť $F : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je lineární zobrazení definované na prvcích báze $\mathcal{A}$ předpisy*

$$F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3,\ F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4,\ F(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1$$

a $G : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je lineární zobrazení definované na prvcích báze $\mathcal{B}$ předpisy

$$G(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2,\ G(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3,\ G(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3,\ G(\mathbf{v}_4) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3.$$

Určete $[G \circ F]_{\mathcal{AC}}$ a $(G \circ F)(\mathbf{z})$ pro $\mathbf{z} = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$.

Řešení. $(G \circ F)(\mathbf{z}) = 2\mathbf{w}_1 - 3\mathbf{w}_2 - 2\mathbf{w}_3$ a

$$[G \circ F]_{\mathcal{AC}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.2. *Nechť $\mathcal{A} = \{(1,2,0)^T,\ (0,1,-1)^T,\ (1,0,1)^T\}$ a $\mathcal{B} = \{(1,-1,0)^T,\ (0,1,-1)^T,\ (1,-1,1)^T\}$ jsou množiny vektorů. Dokažte, že množiny $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ tvoří báze prostoru $\mathcal{R}^3$ a určete matici přechodu od báze $\mathcal{B}$ k bázi $\mathcal{A}$.*

Řešení. Uvažme matice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ resp. } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
jejichž řádky jsou tvořeny vektory množiny $\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{B}$. Upravením obou matic na řádkově odstupňovaný tvar snadno ověříme, že $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = 3$ odkud plyne, že možiny $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou skutečně bazemi prostoru $\mathcal{R}^3$. Zbývá určit matici $[I]_{\mathcal{AB}}$ přechodu od báze $\mathcal{B}$ k bázi $\mathcal{A}$. Využijeme následujících dvou vztahů, které jsou důsledky Tvrzení 7.8.
$$[I]_{\mathcal{AB}} = [I]_{\mathcal{EB}}[I]_{\mathcal{AE}}, \tag{7.1}$$
$$[I]_{\mathcal{EB}} = [I]^{-1}_{\mathcal{BE}}. \tag{7.2}$$
Sloupce matice $[I]_{\mathcal{AE}}$, resp. $[I]_{\mathcal{BE}}$ jsou tvořeny vektory báze $\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{B}$. Spočítáme matici $[I]^{-1}_{\mathcal{BE}}$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$
Podle (7.2) platí, že
$$[I]_{\mathcal{EB}} = [I]^{-1}_{\mathcal{BE}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Dosazením do vztahu (7.1) dostaneme, že
$$[I]_{\mathcal{AB}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Úlohu jsme mohli řešit také takto: Ze vztahů (7.1) a (7.2) odvodíme, že $[I]_{\mathcal{AB}} = [I]^{-1}_{\mathcal{BE}}[I]_{\mathcal{AE}}$, odkud $[I]_{\mathcal{BE}}[I]_{\mathcal{AB}} = [I]_{\mathcal{AE}}$. Odtud plyne, že hledaná matice $[I]_{\mathcal{AB}}$ je řešením rovnice
$$[I]_{\mathcal{BE}}\mathbf{X} = [I]_{\mathcal{AE}}.$$
Tuto rovnici umíme vyřešit přímo (jako v Příkladu 2.3).
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Oběma způsoby jsme dospěli k řešení

$$[I]_{\mathcal{AB}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Cvičení 7.4. *Ověřte, že množina* $\mathcal{A} = \{(1,-2,2)^T, (-1,3,1)^T, (2,-5,2)^T\}$ *tvoří bázi prostoru* $\mathcal{R}^3$ *a určete matici přechodu od standardní báze prostoru* $\mathcal{R}^3$ *k bázi* $\mathcal{A}$.

Řešení.

$$[I]_{\mathcal{AE}} = \begin{pmatrix} 11 & 4 & -1 \\ -6 & -2 & 1 \\ -8 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 7.5. *Dokažte, že množiny* $\mathcal{A} = \{(1,1,-1)^T, (1,3,-2)^T, (-1,-2,2)^T\}$ *a* $\mathcal{B} = \{(-3,-3,1)^T, (1,1,0)^T, (-3,-2,1)^T\}$ *tvoří báze prostoru* $\mathcal{R}^3$. *Určete matici přechodu od báze* $\mathcal{B}$ *k bázi* $\mathcal{A}$ *a matici přechodu od báze* $\mathcal{A}$ *k bázi* $\mathcal{B}$.

Řešení.

$$[I]_{\mathcal{AB}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad [I]_{\mathcal{BA}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.3. *Nechť* $\mathcal{A} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *jsou báze prostoru* $\mathcal{R}^3$ *takové, že*

$$[I]_{\mathcal{AB}} = \begin{pmatrix} 7 & 12 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Určete bázi* $\mathcal{A}$, *jestliže* $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)^T$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (2,1,-1)^T$.

(b) *Určete bázi* $\mathcal{B}$, *jestliže* $\mathbf{u}_1 = (1,0,1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,3)^T$, $\mathbf{u}_3 = (1,4,4)^T$.

Řešení. Stejně, jako v Příkladu 7.2 vyjdeme ze vztahů (7.1) a (7.2).

(a) Protože $[I]_{\mathcal{AE}} = ([\mathbf{u}_1]_{\mathcal{A}} \mid [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{A}} \mid [\mathbf{u}_3]_{\mathcal{A}})$, stačí určit matici přechodu od báze $\mathcal{A}$ ke standardní bázi. Ze vztahů (7.1), (7.2) odvodíme, že

$$[I]_{\mathcal{AE}} = [I]_{\mathcal{BE}}[I]_{\mathcal{AB}}. \tag{7.3}$$

Protože matice $[I]_{\mathcal{AB}}$ a $[I]_{\mathcal{BE}}$ známe (sloupce matice $[I]_{\mathcal{BE}}$ jsou vektory báze $\mathcal{B}$), stačí do vztahu (7.3) dosadit. Po dosazení dostaneme

$$[I]_{\mathcal{AE}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 12 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix},$$

odkud je vidět, že $\mathcal{A} = \left\{(1,-1,3)^T,\ (2,-1,5)^T,\ (1,3,-2)^T\right\}$.

(b) Určíme matici $[I]_{\mathcal{BE}}$. Ze vztahu (7.3) je vidět, že hledaná matice je řešením rovnice

$$[I]_{\mathcal{AE}} = \mathbf{Y}[I]_{\mathcal{AB}},$$

odkud

$$[I]_{\mathcal{AB}}^T \mathbf{Y}^T = [I]_{\mathcal{AE}}^T. \tag{7.4}$$

Rovnici (7.4) umíme vyřešit přímo. Po několika elementárních řádkových úpravách dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 4 & -5 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right),$$

odkud dostáváme (matici vpravo musíme ještě transponovat), že

$$[I]_{\mathcal{BE}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože vektory báze $\mathcal{B}$ odpovídají sloupcům matice $[I]_{\mathcal{BE}}$, je $\mathcal{B} = \{(1,1,0)^T,\ (0,1,2)^T,\ (2,3,1)^T\}$. □

Cvičení 7.6. *Ověřte, že* $\mathcal{B} = \{(0,1,1)^T,\ (2,-1,2)^T,\ (1,0,2)^T\}$ *je báze prostoru* $\mathcal{R}^3$*. Určete bázi* $\mathcal{A}$ *téhož prostoru takovou, že*

$$[I]_{\mathcal{AB}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. $\mathcal{A} = \{(2,-3,0)^T,\ (2,-1,1)^T,\ (0,1,2)^T\}$.

Cvičení 7.7. *Ověřte, že* $\mathcal{A} = \{(2,-5,-2)^T,\ (1,-4,-2)^T,\ (2,-9,-5)^T\}$ *je báze prostoru* $\mathcal{R}^3$*. Nalezněte bázi* $\mathcal{B}$ *prostoru* $\mathcal{R}^3$ *takovou, že*

$$[I]_{\mathcal{AB}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. $\mathcal{B} = \{(1,-2,-1)^T,\ (2,-3,-1)^T,\ (-1,-1,-1)^T\}$.

Příklad 7.4. *Nechť* $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1 = (1,0,1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (-1,1,0)^T$, $\mathbf{u}_3 = (0,-1,1)^T$ *je báze prostoru* $\mathcal{R}^3$ *a* $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1 = (1,2,0,0)^T$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,-1,0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (-1,0,1,0)^T$, $\mathbf{v}_4 = (3,1,0,1)^T\}$ *je prostoru* $\mathcal{R}^4$. *Nechť* $F : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^4$ *je lineární zobrazení určené předpisy*

$$F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4,\ F(\mathbf{u}_2) = 2\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3,\ F(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

Určete matici zobrazení F *vzhledem ke standardním bázím prostoru* $\mathcal{R}^3$, *resp.* $\mathcal{R}^4$.

Řešení. Platí

$$[F]_{\mathcal{E}_3\mathcal{E}_4} = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{E}_4}[F]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{E}_3\mathcal{A}}, \tag{7.5}$$

Matice $[I]_{\mathcal{B}\mathcal{E}_4}$ a $[F]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ určíme přímo dosazením do vztahu (7.5).

$$[I]_{\mathcal{B}\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad [F]_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice $[I]_{\mathcal{E}_3\mathcal{A}}$ je inverzní k matici $[I]_{\mathcal{A}\mathcal{E}_3}$. Výpočtem dostaneme

$$[I]_{\mathcal{E}_3\mathcal{A}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nakonec dosadíme do vztahu (7.5).

$$[F]_{\mathcal{E}_3\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 7 \\ -4 & 4 & 12 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Cvičení 7.8. *Nechť* $\mathcal{A} : \mathbf{u}_1 = (-1,2,1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (-2,1,1)^T$, $\mathbf{u}_3 = (-2,0,1)^T$ *a* $\mathcal{B} : \mathbf{v}_1 = (1,-1,1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (-2,-3,1)^T$ *jsou báze prostoru prostoru* $\mathcal{R}^3$. *Nechť* $F : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ *je lineární zobrazení určené na vektorech báze* $\mathcal{A}$ *předpisy*

$$F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3,\ F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2,\ F(\mathbf{u}_3) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

Určete matici zobrazení F *vzhledem ke standardní bázi prostoru* $\mathcal{R}^3$.

Řešení.

$$[F]_{\mathcal{E}_\ni} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -4 & -4 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.5. *Najděte matici osové symetrie S v $\mathcal{R}^2$ vzhledem ke standardní bázi, prochází-li osa této symetrie počátkem a vektorem $\mathbf{v}_1 = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)^T$ pro nějaký úhel α.*

Řešení. Uvažme bázi $\mathcal{A} : \mathbf{v}_1 = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)^T,\ \mathbf{v}_2 = (-\sin\alpha,\ \cos\alpha)^T$ prostoru $\mathcal{R}^2$. Matice osové symetrie S vzhledem k bázi $\mathcal{A}$ je

$$[S]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Podle definice je matice přechodu od standardní báze prostoru $\mathcal{R}^2$ k bázi $\mathcal{A}$ rovna

$$[I]_{\mathcal{A}\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a tedy

$$[I]_{\mathcal{E}_2\mathcal{A}} = [I]^{-1}_{\mathcal{A}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^2$ platí

$$[S(\mathbf{u})]_{\mathcal{E}_2} = [I]_{\mathcal{A}\mathcal{E}_2}[S(\mathbf{u})]_{\mathcal{A}} = [I]_{\mathcal{A}\mathcal{E}_2}[S]_{\mathcal{A}}[\mathbf{u}]_{\mathcal{A}} = [I]_{\mathcal{A}\mathcal{E}_2}[S]_{\mathcal{A}}[I]_{\mathcal{E}_2\mathcal{A}}[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}_2}.$$

Proto je

$$[S]_{\mathcal{E}_2} = [I]_{\mathcal{A}\mathcal{E}_2}[S]_{\mathcal{A}}[I]_{\mathcal{E}_2\mathcal{A}},$$

odkud dostáváme, že

$$[S]_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

□

Cvičení 7.9. *Najděte matici vzhledem ke standardní bázi v $\mathcal{R}^2$ projekce P na přímku, která prochází počátkem a vektorem $\mathbf{v}_1 = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)^T$ pro nějaký úhel α.*

Řešení.

$$[P]_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}.$$