Teorie míry a integrálu
ZS 2017/18

Jan Rataj

12.1.2018

1 Úvod

Připomenutí: Riemannův Newtonův integrál, geometrický význam plochy pod grafem

Ne všechny funkce jsou "integrovatelné", ne všechny množiny "měřitelné"

Obecná konstrukce: nejprve míra (množinová funkce), z ní je odvozen integrál (aproximace po částech konstantními funkcemi).

Vlastnosti, které chceme po "míře":

(1) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) \geq 0 \ \forall A$,

(2) $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ pro po dvou disjunktní množiny $A_1, A_2, \dots$.

Problém - které množiny jsou "měřitelné", neboli $\mathcal{D}\mu =$?

Příklad: Neexistuje $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ splňující (1), (2) a

(3) $\mu(I) = \text{délka}(I)$ pro každý interval I,

(4) $\mu(A + x) = \mu(A)$, $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Předpokládejme pro spor, že takové zobrazení μ existuje. Uvažujme ekvivalenci na $\mathbb{R}$

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Množina $A \subset [0, 1]$ nechť obsahuje právě jeden prvek z každé třídy ekvivalence $\sim$ (používáme axiom výběru!). Buď dále $\mathbb{Q} \cap [-1, 1] = \{q_1, q_2, \dots\}$ očíslování racionálních čísel v intervalu $[-1, 1]$. Nyní platí:

(a) $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A + q_i) \supset [0, 1]$ (protože pro každý $x \in [0, 1]$ existuje $a \in A$ takové, že $x - a \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, tedy $x - a = q_i$ pro nějaké i, čili $x \in A + q_i$),

(b) $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A + q_i) \subset [-1, 2]$,

(c) množiny $A + q_i$ jsou po dvou disjunktní ($i = 1, 2, \dots$) (kdyby ne, pak by A obsahovala dva ekvivalentní prvky).

Z (2), (4) a (c) plyne, že $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A+q_i))=\infty$ jakmile $\mu(A)>0$, což by bylo v rozporu s (b). Musí tedy být $\mu(A)=0$. Pak ale i $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A+q_i))=0$, což podle (a) a (3) znamená $0>\mu([0,1])=1$, tedy spor. $\square$

2 Prostor s mírou

Buď X libovolná neprázdná množina. Symbolem $\mathcal{P}(X)=\{A:\ A\subset X\}$ značíme potenční množinu množiny X.

Definice 2.1 $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$ je *σ-algebra* na X, jestliže

(i) $\emptyset, X\in\mathcal{A}$;

(ii) $A\in\mathcal{A} \implies X\setminus A\in\mathcal{A}$;

(iii) $A_i\in\mathcal{A}$, $i\in\mathbb{N} \implies \bigcup_i A_i\in\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$ je *algebra*, splňuje-li (1), (2) a

(iii') $A,B\in\mathcal{A} \implies A\cup B\in\mathcal{A}$.

Pozn.: Algebra je uzavřená na konečné množinové operace (průnik, sjednocení, rozdíl), σ-algebra na spočetné množinové operace.

Příklady:

- $\{\emptyset, X\}$, $\mathcal{P}(X)$ jsou σ-algebry na X.
- $\mathcal{A}=\{\emptyset,\{1\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ je σ-algebra na $X=\{1,2,3\}$.
- $\mathcal{A}=\{A\subset\mathbb{N}:\ A \text{ konečná nebo } \mathbb{N}\setminus A \text{ konečná}\}$ je algebra na $\mathbb{N}$, ale není to σ-algebra.

Věta 2.1 *Buďte $\mathcal{A}_\alpha:\ \alpha\in I$ σ-algebry na množině X, přitom I je libovolná indexová množina. Pak $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ je σ-algebra na X.*

Důkaz: Plyne jednoduše z definice. $\square$

Důsledek 2.2 *Pro libovolný množinový systém $\mathcal{S}\subset\mathcal{P}(X)$ existuje nejmenší σ-algebra $\sigma\mathcal{S}$ obsahující $\mathcal{S}$.*

Důkaz: Položme

$$\sigma\mathcal{S} := \bigcap\{\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X):\ \mathcal{S}\subset\mathcal{A},\ \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra}\}.$$

$\square$

Definice 2.2 Buď (X,ρ) metrický prostor a $\mathcal{G}$ systém všech otevřených podmnožin X. Pak $\mathcal{B}(X):=\sigma\mathcal{G}$ nazýváme *borelovskou σ-algebrou* na X.

Příklad: Následující množinové systémy spadají do borelovské σ-algebry:

- $\mathcal{F}$ - systém uzavřených množin
- $\mathcal{G}_\delta$ - spočetné průniky otevřených množin
- $\mathcal{F}_\sigma$ - spočetná sjednocení uzavřených množin
- $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ - spočetná sjednocení množin z $\mathcal{G}_\delta$
- ...

Pozn.: Je obtížné popsat třídu borelovských množin konstruktivně (je třeba transfinitní indukce).

Pozn.: Ne všechny množiny jsou borelovské. Platí dokonce

$$\operatorname{card} \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

tedy neborelovských podmnožin $\mathbb{R}$ je více než borelovských.

Definice 2.3 $(X, \mathcal{A})$ je *měřitelný prostor*, jestliže X je neprázdná množina a $\mathcal{A}$ je σ-algebra na X.
μ je *míra* na $(X, \mathcal{A})$, jestliže $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ splňuje

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní $(i \in \mathbb{N}) \implies \mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ (σ-aditivita).

Trojici $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nazýváme *prostor s mírou.*

Pozn.: Z vlastnosti (b) a z nezápornosti plyne monotonie míry: $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \implies \mu(A) \le \mu(B)$.

Příklady:

- $\mu(A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{P}(X)$ - nulová míra ($\mu = 0$)
- pro $x \in X$ pevný položme

  $$\delta_x(A) = \begin{cases} 0 & x \notin A, \\ 1 & x \in A. \end{cases}.$$

  δ_x se nazývá *Diracova míra* v bodě x.
- Míra

  $$\mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card}(A) & A \subset X \text{ konečná}, \\ \infty & A \subset X \text{ nekonečná}. \end{cases}$$

  se nazývá *aritmetická míra* na X.

Věta 2.3 (Spojitost míry) *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$.*

1. $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \implies \mu(A_i) \nearrow \mu(\bigcup_i A_i)$,
2. $\mu(A_1) < \infty$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \implies \mu(A_i) \searrow \mu(\bigcap_i A_i)$.

Důkaz: 1. Nechť $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \nearrow A$. Pak $A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$ je disjunktní rozklad na měřitelné množiny, tedy $\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1})$. Zároveň $\mu(A_i) = \mu(A_1) + \sum_{i=2}^{j} \mu(A_j \setminus A_{j-1})$, takže $\mu(A_i) \nearrow \mu(A)$, $i \to \infty$.

2. Nechť $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \searrow A$, $\mu(A_1) < \infty$. Položme $B_i := A_1 \setminus A_i$, $i \in \mathbb{N}$. Zřejmě platí $B_i \nearrow B := A_1 \setminus A$, tedy $\mu(A_1) - \mu(A_i) = \mu(B_i) \nearrow \mu(B) = \mu(A_1) - \mu(A)$, a odečtením výrazu $\mu(A_1) < \infty$ dostaneme $\mu(A_i) \searrow \mu(A)$. □

Definice 2.4 Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že $N \subset X$ je *nulová množina*, jestliže existuje $A \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) = 0$ a $N \subset A$. Symbolem $\mathcal{N}$ značíme systém všech nulových množin. dále značíme

$$\mathcal{A}_0 := \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$$

zúplněnou σ-algebru $\mathcal{A}$ vzhledem k míře μ.

Pozn: $\mathcal{N}$ je *σ-ideál*, tedy systém množin uzavřený na podmnožiny a spočetná sjednocení.

Věta 2.4 (Zúplnění míry) *Je dán prostor s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pak platí:*

1. *$\mathcal{A}_0 = \{B \subset X : \exists A \in \mathcal{A}, B \triangle A \in \mathcal{N}\}$ (symbolem $\triangle$ značíme symetrickou diferenci množin).*
2. *Míru μ lze jednoznačně rozšířit na prostor $(X, \mathcal{A}_0)$ (značíme opět μ).*
3. *V prostoru $(X, \mathcal{A}_0, \mu)$ jsou všechny nulové množiny měřitelné.*

Důkaz: 1. Označme $\overline{\mathcal{A}}_0 := \{B \subset X : \exists A \in \mathcal{A}, B \triangle A \in \mathcal{N}\}$. Ukážeme nejprve, že $\overline{\mathcal{A}}_0$ je σ-algebra. Zřejmě platí $\emptyset, X \in \overline{\mathcal{A}}_0$. Je-li $B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, pak $A \triangle B \in \mathcal{N}$ pro nějakou $A \in \mathcal{A}$, a tedy také $X \setminus B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, protože $(X \setminus B) \triangle (X \setminus A) = B \triangle A \in \mathcal{N}$ a $X \setminus A \in \mathcal{A}$. Dále, jsou-li $B_i \in \overline{\mathcal{A}}_0$, $i \in \mathbb{N}$, pak $B_i \triangle A_i \in \mathcal{N}$ pro nějaké $A_i \in \mathcal{A}$, a tedy také $\bigcup_i B_i \in \overline{\mathcal{A}}_0$, protože $(\bigcup_i B_i) \triangle (\bigcup_i A_i) \subset \bigcup_i (B_i \triangle A_i) \in \mathcal{N}$. $\overline{\mathcal{A}}_0$ je tedy σ-algebra. Pak ale ze zřejmé inkluze $\mathcal{A} \cup \mathcal{N} \subset \overline{\mathcal{A}}_0$ plyne $\mathcal{A}_0 = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}) \subset \sigma\overline{\mathcal{A}}_0 = \overline{\mathcal{A}}_0$. Opačná inkluze je snadná: je-li $B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, pak $B \triangle A \in \mathcal{N}$ pro nějakou $A \in \mathcal{A}$, tedy $B = A \cup (B \setminus A) \setminus (A \setminus B)$, přitom $B \setminus A$ i $A \setminus B$ leží v $\mathcal{N}$, tedy nutně $B \in \mathcal{A}_0$.

2. Je-li $B \in \mathcal{A}_0$ a $A \in \mathcal{A}$ taková, že $B \triangle A \in \mathcal{N}$, položíme $\mu(B) := \mu(A)$. Nejprve musíme ukázat, že toto rozšíření je korektní, tedy že nezávisí na volbě A. Je-li $A' \in \mathcal{A}$ jiná množina s vlastností $B \triangle A' \in \mathcal{N}$, pak z inkluzí $A \setminus A' \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A') \in \mathcal{N}$ a $A' \setminus A \subset (A' \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{N}$ plyne $\mu(A \setminus A') = \mu(A' \setminus A) = 0$, a tedy $\mu(A) = \mu(A')$. Definice je tedy korektní. Ukážeme, že takto dodefinovaná

množinová funkce μ je σ-aditivní. Buď (B_i) posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}_0$, označme $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, a buďte $A_i \in \mathcal{A}$ takové, že $B_i \triangle A_i \in \mathcal{N}$. Položme $C_1 := A_1$, $C_i := A_i \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1})$, $i = 2, 3 \dots$, $C := \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Pak (C_i) je posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$, tedy $\mu(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i)$. Protože množiny $C_i \triangle B_i$ a $C \triangle B$ jsou nulové, platí $\mu(B_i) = \mu(C_i)$, $i \in \mathbb{N}$, a $\mu(B) = \mu(C)$, a tedy také $\mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$. Tím je dokázáno, že μ je σ-aditivní na $\mathcal{A}_0$, a je to tedy míra.

3. Buď $M \subset X$ nulová v $(X, \mathcal{A}_0, \mu)$. Ukážeme, že $M \in \mathcal{N}$ (tedy že M je nulová i v původním prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$), a tedy $M \in \mathcal{A}_0$. K množině M existuje $B \in \mathcal{A}_0$, $M \subset B$, $\mu(B) = 0$. Z definice rozšířené míry μ dále existuje $A \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) = 0$ a $B \setminus A \in \mathcal{N}$, tedy existuje $N \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(N) = 0$ a $B \setminus A \subset N$. Pak ale $M \subset B \subset A \cup N \in \mathcal{A}$ a $\mu(A \cup N) = 0$, tedy $M \in \mathcal{N}$. $\square$

Definice 2.5 (i) μ je *borelovská míra* na metrickém prostoru X, je-li to míra na $(X, \mathcal{B}(X))$.

(ii) Míra μ na $(X, \mathcal{A})$ je *konečná*, jestliže $\mu(X) < \infty$.

(iii) Míra μ na $(X, \mathcal{A})$ je *σ-konečná*, jestliže existují $E_n \in \mathcal{A}$ takové, že $X = \bigcup_n E_n$ a $\mu(E_n) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Věta 2.5 (Lebesgueova míra) *Existuje právě jedna borelovská míra λ^n na $\mathbb{R}^n$ taková, že pro všechna $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$, platí*

$$\lambda^n([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

[Důkaz bude později]

Poznámky:

1. Lebesgueova míra je zřejmě σ-konečná.

2. Značíme $\mathcal{B}_0^n$ zúplnění $\mathcal{B}^n$ vzhledem k λ^n. Platí $\mathcal{B}^n \subsetneq \mathcal{B}_0^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

3. Lebesgueova míra je regulární v tomto smyslu (důkaz bude později): *Ke každé $E \in \mathcal{B}_0^n$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují G otevřená, F uzavřená, $F \subset E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$.*

3 Měřitelné funkce

Věta 3.1 *Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$.*

(i) *Je-li $\mathcal{B}$ σ-algebra na Y, pak $f^{-1}\mathcal{B} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ je σ-algebra na X.*

(ii) *Pro libovolný množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ platí $\sigma(f^{-1}\mathcal{S}) = f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$.*

Důkaz: (i) se snadno dokáže s využitím faktu, že vzor množiny komutuje s množinovými operacemi. Konkrétně platí $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ a $\bigcup_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\bigcup_i B_i)$, kdykoliv $B, B_1, B_2, \dots \subset Y$.

(ii). Zřejmě $f^{-1}\mathcal{S} \subset f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$, a tedy $\sigma(f^{-1}\mathcal{S}) \subset \sigma(f^{-1}(\sigma\mathcal{S})) = f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$, protože $f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$ je σ-algebra podle části (i). Pro důkaz opačné inkluze označme množinový systém

$$\mathcal{A} := \{B \subset Y : \ f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}\mathcal{S})\}.$$

Je snadné ověřit, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra. Dále zřejmě $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, a tedy také $\sigma\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, tudíž $f^{-1}(\sigma\mathcal{S}) \subset f^{-1}\mathcal{A} \subset \sigma(f^{-1}\mathcal{S})$, kde poslední inkluze plyne přímo z definice systému $\mathcal{A}$. □

Definice 3.1 Buďte $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{B})$ měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ je *měřitelné* (vzhledem k $\mathcal{A}, \mathcal{B}$), jestliže $f^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Píšeme pak $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$. Je-li některý z prostorů X, Y metrickým prostorem, pak za příslušnou σ-algebru bereme borelovskou σ-algebru. Měřitelné zobrazení mezi dvěma metrickými prostory nazýváme *borelovsky měřitelné* nebo stručně *borelovské.*

Pozn.:

1. Složení dvou měřitelných zobrazení je zřejmě měřitelné.
2. Jsou-li $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{B})$ měřitelné prostory a $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ libovolný generátor σ-algebry $\mathcal{B}$ (tzn. platí-li $\sigma\mathcal{S} = \mathcal{B}$), pak $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$. (Plyne z Věty 3.1.)
3. Je-li $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor a Y metrický prostor, pak zobrazení $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ pro každou otevřenou množinu $G \subset Y$.

Tvrzení 3.2 *Každé spojité zobrazení mezi dvěma metrickými prostory je borelovsky měřitelné.*

Důkaz: Plyne přímo z předchozí poznámky a z faktu, že f je spojité právě tehdy, když vzory otevřených množin jsou otevřené. □

Věta 3.3 *Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je generovaná*

1. *otevřenými kvádry (tj. množinami $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$, $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$;*
2. *systémem $\mathcal{S} = \{(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n) : \ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$.*

Speciálně, $\mathcal{B}^1 = \sigma\{(-\infty, a) : \ a \in \mathbb{R}\}$.

Důkaz: 1. Plyne přímo z faktu, že každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako spočetné sjednocení otevřených kvádrů. Skutečně, označíme-li symbolem $\mathcal{Q}$ systém všech otevřených kvádrů v $\mathbb{R}^n$ s racionálními krajními body, pak lze psát

$$G = \bigcup \{I \in \mathcal{Q} : I \subset G\}.$$

K ověření vlastnosti 2. stačí ukázat, že každý otevřený kvádr leží v $\sigma\mathcal{S}$. Ověříme tuto vlastnost v $\mathbb{R}^2$ (případ obecné dimenze je zcela analogický). Pro otevřený kvádr $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ můžeme psát

$$I = ((-\infty, b_1) \times (-\infty, b_2)) \setminus ((-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2)) \setminus ((-\infty, b_1) \times (-\infty, a_2]),$$

přitom

$$(-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (-\infty, a_1 + k^{-1}) \times (-\infty, b_2) \in \sigma\mathcal{S},$$

a analogicky pro $(-\infty, b_1) \times (-\infty, a_2]$. $\square$

Pozn.: Jako generátor $\mathcal{B}^n$ lze vzít rovněž uzavřené či polouzavřené kvádry. Navíc stačí vzít pouze kvádry s racionálními koncovými body.

Věta 3.4
1. *Jsou-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ a $g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^m$ měřitelná zobrazení, pak i $(f, g) : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^{n+m}$ je měřitelné.*
2. *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ měřitelná, jsou i $f + g$ a $f - g$ měřitelná.*
3. *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, jsou i $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ měřitelné.*

Důkaz: 1. Každý otevřený kvádr $I \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je tvaru $I = U \times V$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené kvádry. Pak platí

$$(f, g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \in \mathcal{A},$$

a tedy (f, g) je měřitelné podle Věty 3.3.

2. Měřitelnost $f + g$ plyne z toho, že součet funkcí můžeme psát jako složení

$$f + g = + \circ (f, g),$$

kde $+ : (x, y) \mapsto x + y$ je operace sčítání v $\mathbb{R}^n$ a $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ je spojení zobrazení z prvního tvrzení. Měřitelnost složení pak plyne z měřitelnosti obou komponent. Měřitelnost zbývajících zobrazení (funkcí) se ukáže analogicky. $\square$

Důsledek 3.5 *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, pak leží množiny $\{f \le g\}$, $\{f < g\}$ a $\{f = g\}$ v σ-algebře $\mathcal{A}$.*

Budeme značit $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\mathcal{B}^* := \sigma(\mathcal{B}^1 \cup \{\{-\infty\}, \{\infty\}\})$. $\mathcal{B}^*$ je rovněž generována intervaly a předchozí tvrzení pro reálné měřitelné funkce platí i pro "numerické" měřitelné funkce s hodnotami v $\mathbb{R}^*$.

Věta 3.6 *Buďte $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelné, $n \in \mathbb{N}$. Pak jsou funkce $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n \to \infty} f_n$ a $\liminf_{n \to \infty} f_n$ rovněž měřitelné.*

Důkaz: Označme $g := \sup_n f_n$. Pak pro libovolné $b \in \mathbb{R}^*$ platí

$$g^{-1}([-\infty, b]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq b\} \in \mathcal{A},$$

tedy g je měřitelná, neboť intervaly $[-\infty, b]$: $b \in \mathbb{R}^*$ generují $\mathcal{B}^*$. Dále označme $h := \limsup_{n\to\infty} f_n$. Pak pro libovolné $b \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\begin{aligned} h^{-1}([-\infty, b]) &= \{x \in X : (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) : f_n(x) \leq b + \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \{f_n \leq b + \frac{1}{k}\} \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

tedy i h je měřitelná. Případ infima a liminf je analogický. □

Pozn.: Z předchozí věty plyne, že limita měřitelných funkcí je měřitelná, pokud existuje.

Definice 3.2 Funkce $s : X \to [0, \infty)$ je *jednoduchá*, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Věta 3.7 *Je-li* $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ *měřitelná, existují funkce* $s_n : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty)$ *jednoduché měřitelné takové, že* $s_n \nearrow f$ $(n \to \infty)$.

Důkaz: Položme

$$s_n(x) := \max\left\{\frac{k}{2^n} : \frac{k}{2^n} \leq f(x),\, k = 0, 1, \ldots, n2^n\right\}, \quad x \in X.$$

Není těžké ověřit, že s_n jsou jednoduché měřitelné funkce a že $s_n \nearrow f$. □

4 Abstraktní Lebesgueův integrál

Definice 4.1 Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

(a) Je-li $s : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty)$ jednoduchá měřitelná tvaru $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}$ ($\alpha_j \geq 0$ a $E_j \in \mathcal{A}$), klademe

$$\int_X s\, d\mu = \int_X s(x)\, d\mu(x) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j).$$

(Je-li některé $\alpha_j = 0$, klademe $\alpha_j \mu(E_j) = 0$, tedy používáme konvenci $0 \cdot \infty = 0$.)

(b) Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ měřitelná, klademe

$$\int_X f\, d\mu := \sup\left\{\int_X s\, d\mu : 0 \leq s \leq f,\, s \text{ jedn. měř.}\right\}.$$

(c) Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná, klademe

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu,$$

má-li rozdíl smysl. (Zde f^+, f^- značí kladnou, resp. zápornou část funkce f.)

Symbolem $\mathcal{L}^*(\mu)$ značíme množinu všech měřitelných funkcí na $(X, \mathcal{A})$, jejichž integrál podle μ je definován.

Pozn.:

1. V definici (a) je třeba ověřit korektnost, tedy že integrál z jednoduché měřitelné funkce nezávisí na jejím konkrétním vyjádření.

2. Je-li f měřitelná a $E \in \mathcal{A}$, značíme

$$\int_E f \, d\mu := \int_X (f \cdot \chi_E) \, d\mu.$$

   Místo $\int_X f \, d\mu$ píšeme také pouze $\int f \, d\mu$.

3. Je-li f měřitelná taková, že $\int f^+ \, d\mu = \int f^- \, d\mu = \infty$, pak $\int f \, d\mu$ není definován. Říkáme proto, že (abstraktní) Lebesgueův integrál je *absolutně konvergentní* (na rozdíl od Newtonova integrálu).

Tvrzení 4.1 (Monotonie integrálu) *Pro $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelné s vlastností $0 \leq f \leq g$ platí $0 \leq \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.*

Věta 4.2 (Leviho věta) *Jsou-li f_n nezáporné měřitelné funkce na X takové, že $f_n \nearrow f$, platí $\int_X f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$ $(n \to \infty)$.*

Důkaz: Označme $a_n := \int f_n \, d\mu \in [0, \infty]$, $a := \lim_{n \to \infty} a_n$ (posloupnost (a_n) je neklesající podle předchozího tvrzení). Zřejmě platí nerovnost $a \leq \int f \, d\mu$. Ukážeme, že také $a \geq \int f \, d\mu$.

Je-li $a = \infty$, nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy dále, že $a < \infty$. Ukážeme, že $a \geq \int s \, d\mu$ pro každou jednoduchou měřitelnou funkci $s \leq f$. Pak bude i $a \geq \int f \, d\mu$ podle definice integrálu.

Buď tedy $0 \leq s \leq f$ jednoduchá měřitelná funkce. Zvolme $0 < \tau < 1$ a označme

$$E_n := \{x \in X : f_n(x) \geq \tau s(x)\}.$$

Zřejmě $E_n \in \mathcal{A}$, $E_n \subset E_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, a $\bigcup_n E_n = X$. Podle věty o spojitosti míry platí

$$\mu(A \cap E_n) \nearrow \mu(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Zapišme s ve tvaru $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$, kde $X = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ je rozklad prostoru X. Pak platí

$$\begin{aligned}\int_X f_n \, d\mu &\geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} (\tau s) \, d\mu = \tau \int (s\chi_{E_n}) \, d\mu \\ &= \tau \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j \cap E_n) \to \tau \int s \, d\mu, \quad n \to \infty,\end{aligned}$$

a tedy

$$a = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq \tau \int s \, d\mu.$$

Protože nerovnost platí pro libovolné $\tau \in (0,1)$, platí i $a \geq \int s \, d\mu$, a důkaz je hotov. $\square$

Věta 4.3 (Fatouovo lemma) *Pro funkce f_n nezáporné měřitelné na X platí*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Důkaz: Označme $g_n(x) := \inf\{f_k(x) : k \geq n\}$, $x \in X$. Funkce g_n jsou měřitelné (Věta 3.6) a platí $g_n \nearrow g := \liminf_{n\to\infty} f_n$ (z definice lim inf). Podle Leviho věty platí $\int g_n \, d\mu \nearrow \int g \, d\mu$. Dále zřejmě $g_n \leq f_n$, a tedy $\int g_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$, $n \in \mathbb{N}$, a limitním přechodem dostaneme $\int g \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$. $\square$

Definice 4.2 Označme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*(\mu) &:= \left\{ f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^* \text{ měř.} : \int f \, d\mu \text{ je definován} \right\}, \\ \mathcal{L}^1(\mu) &:= \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu) : \int |f| \, d\mu < \infty \right\}.\end{aligned}$$

Věta 4.4 (Linearita integrálu) *Jsou-li funkce $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a platí*

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Důkaz: (i) Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ pak i $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$ (cvičení).

(ii) Buďte $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Ukážeme, že i $f + g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

(a) Jsou-li f, g nezáporné jednoduché, rovnost integrálů plyne snadno z definice.

(b) Jsou li f, g nezáporné, pak podle Věty 3.7 existují jednoduché měřitelné funkce s_n, t_n takové, že $s_n \nearrow f$ a $t_n \nearrow g$, tedy $\int s_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$ a $\int t_n \, d\mu \nearrow$

$\int g\,d\mu$ podle Leviho věty. Ze stejného důvodu platí i $\int (s_n + t_n)\,d\mu \nearrow \int (f+g)\,d\mu$. Víme již, že $\int (s_n + t_n)\,d\mu = \int s_n\,d\mu + \int t_n\,d\mu$, a limitním přechodem $(n \to \infty)$ dostaneme požadovanou rovnost.

(c) Buďte nyní $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ libovolné. Z nerovností $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$, $(f+g)^- \leq f^- + g^-$ plyne $f + g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dále platí

$$f + g = (f+g)^+ - (f+g)^- = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-),$$

tedy $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. Všechny zde vystupující funkce jsou nezáporné, tudíž platí

$$\int (f+g)^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu + \int g^-\,d\mu = \int (f+g)^-\,d\mu + \int f^+\,d\mu + \int g^+\,d\mu,$$

z čehož pak vhodným odečtením dostaneme požadovanou rovnost $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$. □

Pozn.: Platí dokonce, že jsou-li f, g měřitelné, pak $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$, má-li pravá strana smysl. (Cvičení)

Důsledek 4.5 *Pro nezáporné měřitelné funkce f_n na X platí*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Důkaz: Podle předchozí věty (a poznámky) platí

$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} f_n \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f_k\,d\mu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Limitním přechodem a s využitím Leviho věty dostaneme tvrzení. □

Tvrzení 4.6 $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \implies \left| \int f\,d\mu \right| \leq \int |f|\,d\mu$.

Důkaz: Podle trojúhelníkové nerovnosti a definice integrálu platí

$$\left| \int f\,d\mu \right| = \left| \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu \right| \leq \int f^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu = \int |f|\,d\mu.$$

□

Cvičení:

1. $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu) \implies \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
2. Je-li funkce f měřitelná a $|f| \leq g$ pro nějakou funkci $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak i $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Věta 4.7 (Zobecněná Leviho věta) *Buďte funkce f_n měřitelné na X ($n \in \mathbb{N}$) takové, že $f_n \nearrow f$ a $\int f_1\,d\mu > -\infty$. Pak $\int f_n\,d\mu \nearrow \int f\,d\mu$.*

Důkaz: Je-li $\int f_1\,d\mu = \infty$, tvrzení zřejmě platí. Nechť tedy $\int f_1\,d\mu \in \mathbb{R}$. Protože $0 \le f_n - f_1 \nearrow f - f_1$, podle Leviho věty platí $\int (f_n - f_1)\,d\mu \nearrow \int (f - f_1)\,d\mu$, a z aditivity integrálu dostaneme $\int f_n\,d\mu \nearrow \int f\,d\mu$. $\square$

Důsledek 4.8 *Jsou-li funkce f_n měřitelné, $f_n \searrow f$ a $\int f_1\,d\mu < \infty$, pak $\int f_n\,d\mu \searrow \int f\,d\mu$.*

Definice 4.3 Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že vlastnost $V(x)$ mají (μ-)*skoro všechny* body $x \in X$ (zkráceně *s.v.*), jestliže

$$\mu(\{x \in X : \neg V(x)\}) = 0.$$

Tvrzení 4.9 *Nechť f, g jsou měřitelné funkce na X takové, že $f = g$ s.v. Pak platí*

$$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu, \text{ má-li jedna strana smysl.}$$

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že f i g jsou nezáporné funkce. Je-li $s \le f$ libovolná měřitelná jednoduchá funkce, pak $s' := s\chi_{\{f=g\}}$ je rovněž jednoduchá měřitelná a splňuje $s' \le g$ a $\int s\,d\mu = \int s'\,d\mu$. Musí tedy být $\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$. Obrácená nerovnost plyne ze symetrie. Bez předpokladu nezápornosti ukážeme rovnost integrálu z kladných a záporných částí (platí totiž zřejmě také $f^+ = g^+$ s.v. a $f^- = g^-$ s.v.). $\square$

Pozn.:

1. Pro účely integrálu stačí, aby funkce byla definována skoro všude.
2. Nechť je prostor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *úplný*. Pak z rovnosti $f = g$ s.v. plyne

   $$f \text{ je měřitelná} \iff g \text{ je měřitelná.}$$

3. Při zúplnění prostoru s mírou se integrály definované v původním prostoru nemění.

Věta 4.10 (Lebesgueova; o konvergentní majorantě) *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, f měřitelné funkce takové, že $f_n \to f$ s.v. Nechť dále existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f_n| \le g$ s.v. pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$.*

Důkaz: Předefinujeme-li funkce f_n, f na množině

$$\{x : f_n(x) \not\to f(x)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |f_n(x)| > g(x)\}$$

nulové míry, budou předpoklady věty platit pro všechna $x \in X$. Označme

$$g_n := \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, \quad h_n := \sup\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě platí

$$-g \le g_n \le f_n \le h_n \le g, \quad n \in \mathbb{N},$$

tedy $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, a $g_n \nearrow f$, $h_n \searrow f$, $n \to \infty$, tedy podle zobecněné Leviho věty platí $\int g_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ a $\int h_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$. Protože $\int g_n \, d\mu \le \int h_n \, d\mu \le \int h_n \, d\mu$, platí také $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ podle věty o dvou strážnících. $\square$

Důsledek 4.11 *Jsou-li f_i měřitelné, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ konverguje s.v., a $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|\sum_{i=1}^{n} f_i| \le g$ s.v. pro všechna n, pak $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a*

$$\int \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i \right) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, d\mu.$$

5 Integrály závislé na parametru

V následujícím textu budeme pracovat s funkcemi $f : T \times X \to \mathbb{R}$. Symbolem $f(\cdot, x)$ a $f(t, \cdot)$ budeme rozumět vždy funkci jedné proměnné (znázorněné tečkou) při pevné hodnotě (parametru) druhé proměnné.

Věta 5.1 (Lebesgueova; o spojité závislosti integrálu na parametru) *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, T metrický prostor a $f : T \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in T$,*

(ii) *$f(\cdot, x)$ je spojitá na T pro s.v. $x \in X$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f(t, \cdot)| \le g$ s.v. pro všechna $t \in T$.*

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in T$ a funkce

$$F : t \mapsto \int f(t, x) \, d\mu$$

je spojitá na T.

Důkaz: Z předpokladu $|f(t, \cdot)| \le g$ s.v. zřejmě plyne $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $t \in T$. Označme $N \subset X$ množinu nulové míry takovou, že $f(\cdot, x)$ je spojitá na T pro všechna $x \in X \setminus N$. Zvolíme-li libovolnou posloupnost $t_j \to t$ v T a libovolný $x \in X \setminus N$, platí podle Heineho věty $\lim_{j \to \infty} f(t_j, x) = f(t, x)$. Podle Lebesgueovy věty (o konvergentní majorantě) platí $\lim_{j \to \infty} F(t_j) = F(t)$. Toto platí pro každou posloupnost $t_j \to t \in T$, a tedy F je spojitá na T, opět podle Heineho věty. $\square$

Věta 5.2 (Záměna integrálu a derivace) *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval a $f : I \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in I$,*

(ii) *existuje* $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$, *taková, že pro všechna* $x \in X \setminus N$ *a pro všechna* $t \in I$ *existuje vlastní derivace* $\frac{d}{dt} f(t,x)$,

(iii) *existuje* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *taková, že pro všechna* $t \in I$, $|\frac{d}{dt} f(t,x)| \leq g(x)$ *pro s.v.* $x \in X$,

(iv) *existuje* $t_0 \in I$ *takové, že* $f(t_0, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Pak $f(t,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *pro všechna* $t \in I$, *funkce*

$$F : t \mapsto \int f(t,x)\, d\mu(x)$$

je diferencovatelná na I *a platí*

$$F'(t) = \int \frac{d}{dt} f(t,x)\, d\mu(x), \quad t \in I.$$

Důkaz: Pro libovolné $a, b \in I$, $a < b$, a $x \in X \setminus N$ existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě $c_x \in (a,b)$ takové, že

$$\frac{f(b,x) - f(a,x)}{b-a} = \frac{d}{dt} f(c_x, x).$$

Z předpokladu (iii) plyne, že funkce $x \mapsto \frac{d}{dt} f(c_x, x)$ leží v prostoru $\mathcal{L}^1(\mu)$. Zvolíme-li za jeden z bodů a, b bod t_0, dostaneme $f(t,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in I$. Uvažujme nyní libovolnou posloupnost $t_j \to t \in I$, $T \ni t_j \neq t$. Platí

$$\lim_{j\to\infty} \frac{F(t_j) - F(t)}{t_j - t} = \lim_{j\to\infty} \int \frac{f(t_j,x) - f(t,x)}{t_j - t}\, d\mu(x) = \int \frac{d}{dt} f(t,x)\, d\mu(x);$$

poslední rovnost plyne z Lebesgueovy věty o konvergentní majorantě a z definice derivace. Protože uvedená rovnost platí pro libovolnou posloupnost $t_j \to t \in I$, $t_j \neq t$, dostáváme $F'(t) = \int \frac{d}{dt} f(t,x)\, d\mu(x)$, $t \in I$. $\square$

6 Vztah Lebesgueova a Riemannova integrálu

Věta 6.1 *Je-li* $f \geq 0$ *na prostoru s mírou* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *a platí-li* $\int f\, d\mu = 0$, *je* $f = 0$ *s.v.*

Důkaz: Označme $A_n := \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Zřejmě $A_n \in \mathcal{A}$, $\chi_{A_n} \leq nf$, a tedy $\mu(A_n) = \int \chi_{A_n}\, d\mu \leq n \int f\, d\mu = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Protože $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, platí $\mu(\{f > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$. $\square$

Důsledek: Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \leq g$ a $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$, pak $f = g$ s.v.

Důsledek 6.2 *Nechť pro funkci* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *platí* $\int_E f\, d\mu = 0$ *pro každou množinu* $E \in \mathcal{A}$. *Pak* $f = 0$ *s.v.*

Důkaz: Zvolme nejprve $E_+ := \{f > 0\}$. Pak podle předpokladu platí $\int f^+ \, d\mu = \int_{E_+} f \, d\mu = 0$, a protože $f^+ \geq 0$, je $f^+ = 0$ s.v. podle Věty 6.1. Podobně volbou $E_- := \{f < 0\}$ odvodíme, že $f^- = 0$ s.v. Pak ale musí být $f = 0$ s.v. □

Značení: Budeme uvažovat restrikci (zúplněné) Lebesgueovy míry λ^1 na omezený otevřený interval (a, b). Budeme značit $\mathcal{L}^1(a, b)$ příslušný prostor integrovatelných funkcí a $\int_a^b f \, d\lambda^1$ Lebesgueův integrál z funkce $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$. Dále symbolem $\mathcal{R}[a, b]$ značíme množinu všech omezených funkcí na $[a, b]$, pro něž existuje Riemannův integrál (R) $\int_a^b f$.

Věta 6.3 *Je-li $f \in \mathcal{R}[a, b]$, pak $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$ a* (R) $\int_a^b f = \int_a^b f \, d\lambda^1$.

Důkaz: Protože $f \in \mathcal{R}[a, b]$, existuje posloupnost $(\mathcal{D}_n)$ zjemňujících se dělení intervalu $[a, b]$ taková, že

$$\mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n) \nearrow (\mathrm{R}) \int_a^b f \swarrow \mathscr{S}(f, \mathcal{D}_n), \quad n \to \infty$$

($\mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n)$ a $\mathscr{S}(f, \mathcal{D}_n)$ značí dolní a horní Riemannův součet f přes dělení $\mathcal{D}_n$). Je-li $\mathcal{D}_n = \{a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b\}$, zaveďme funkce s_n, S_n předpisem

$$s_n(x) = \inf_{[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f, \quad S_n(x) = \sup_{[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f, \quad x \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}],\ i = 1, \ldots, k_n,$$

a $s_n(x) = S_n(x) = 0$ pro ostatní hodnoty $x \in \mathbb{R}$. Pak zřejmě platí

$$\mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b s_n \, d\lambda^1, \quad \mathscr{S}(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b S_n \, d\lambda^1.$$

Funkce f je dle předpokladu omezená, tedy $|f| \leq M$ pro nějaké $M \in \mathbb{R}$. Platí

$$-M \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f \leq \cdots \leq S_2 \leq S_1 \leq M.$$

Označme $f_1 := \lim_{n\to\infty} s_n$, $f_2 := \lim_{n\to\infty} S_n$ (monotónní omezená posloupnost vždy konverguje). Pak platí

$$-M \leq s_n \nearrow f_1 \leq f \leq f_2 \swarrow S_n \leq M.$$

a podle zobecněné Leviho věty tedy

$$\int_a^b s_n \, d\lambda^1 \to \int_a^b f_1 \, d\lambda^1, \quad \int_a^b S_n \, d\lambda^1 \to \int_a^b f_2 \, d\lambda^1.$$

Podle předpokladu ale také

$$\int_a^b s_n \, d\lambda^1 = \mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n) \nearrow (\mathrm{R}) \int_a^b f \swarrow \mathscr{S}(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b S_n \, d\lambda^1,$$

takže $\int_a^b f_1\,d\lambda^1 = \int_a^b f_2\,d\lambda^1 = (\mathrm{R})\int_a^b f$. Podle důsledku Věty 6.1 je $f_1 = f_2$ s.v., a zřejmě tedy také $f = f_1$ s.v. (neboť $f_1 \le f \le f_2$), a tedy také $\int_a^b f\,d\lambda^1 = (\mathrm{R})\int_a^b f$. Měřitelnost f plyne z měřitelnosti $f_1 = \lim s_n$ a z úplnosti prostoru s mírou. $\square$

Věta 6.4 *Buď $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená. Pak*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff f \text{ je spojitá } \lambda^1\text{-s.v. na } [a,b].$$

Důkaz: Buď $(\mathcal{D}_n)$ posloupnost zjemňujících se dělení intervalu $[a,b]$, se stejným označením dělicích bodů, jako v důkazu Věty 6.3, a předpokládejme, že normy dělení

$$\|\mathcal{D}_n\| = \max_{1\le i\le k_n} |x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Buďte s_n, S_n, f_1, f_2 zvoleny stejně, jako v důkazu Věty 6.3.

$\Longrightarrow$: Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Pak platí $f_1 = f_2$ s.v. (viz důkaz Věty 6.3). Označme

$$N := \{f_1 \ne f_2\} \cup \{x_i^{(n)} : 1 \le i \le k_n,\ n = 1,2,\dots\}.$$

Podle předpokladu platí $\lambda^1(N) = 0$. Ukážeme, že f je spojitá v každém bodě $x \in (a,b)\setminus N$. Nechť jsou dány $x \in (a,b)\setminus N$ a $\varepsilon > 0$. Protože $f_1(x) = f_2(x)$, musí existovat $n \in \mathbb{N}$ takové, že $S_n(x) - s_n(x) < \varepsilon$. Označme I_n ten otevřený interval z dělení $\mathcal{D}_n$, pro nějž je $x \in I_n$. Pak platí $s_n(x) < f(y) < S_n(x)$ pro všechna $y \in I_n$, a tedy $|f(y) - f(x)| \le \varepsilon$ kdykoliv $y \in I_n$. Tím je dokázáno, že funkce f je spojitá v x.

$\Longleftarrow$: Označme D množinu všech bodů z (a,b), v nichž f není spojitá. Podle předpokladu $\lambda^1(D) = 0$. Ukážeme, že $S_n(x) - s_n(x) \to 0$, $n \to \infty$, kdykoliv $x \in (a,b)\setminus D$. Pak bude podle Leviho věty platit $\int_a^b (S_n - s_n)\,d\lambda^1 \to 0$, tedy $\mathscr{S}(f,\mathcal{D}_n) - \mathfrak{s}(f,\mathcal{D}_n) \to 0$, což bude znamenat, že $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Nechť jsou tedy dány $x \in (a,b)\setminus D$ a $\varepsilon > 0$. Z definice spojitosti existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ kdykoliv $|y - x| < \delta$. Zvolne n_0 tak velké, aby $\|\mathcal{D}_n\| < \delta$ kdykoliv $n \ge n_0$. Pak platí

$$S_n(x) - s_n(x) \le 2\sup\{|f(y) - f(x)| : |y - x| < \delta\} \le 2\varepsilon, \quad n \ge n_0,$$

a důkaz je hotov. $\square$

Příklad: Je-li $C \subset [0,1]$ Cantorovo diskontinuum, pak χ_C je spojitá v bodech $x \in [0,1]\setminus C$, nespojitá v bodech C, a platí $\chi_C \in \mathcal{R}[0,1]$.

7 Věta o jednoznačnosti míry

Definice 7.1 Řekneme, že $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ je *Dynkinův systém*, jestliže

(i) $X \in \mathcal{D}$,

(ii) $D \in \mathcal{D} \implies X \setminus D \in \mathcal{D}$,

(iii) $D_n \in \mathcal{D}$, D_n po dvou disjunktní $\implies \bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$.

Pozn.:

1. Dynkinův systém je uzavřen i na vlastní množinové rozdíly: Jsou-li $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$, pak i $B \setminus A \in \mathcal{D}$.

2. Každá σ-algebra je zřejmě Dynkinův systém, ale ne naopak.

Tvrzení 7.1 (a) *Průnik libovolného systému Dynkinových systémů je opět Dynkinův systém.*

(b) *Pro každý množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ existuje nejmenší Dynkinův systém, obsahující $\mathcal{S}$:*

$$\delta\mathcal{S} := \bigcap\{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X) \text{ Dynkinův syst.}, \mathcal{S} \subset \mathcal{D}\}.$$

Věta 7.2 *Nechť je množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ uzavřen na konečné průniky. Pak $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$.*

Důkaz: Ukážeme, že $\delta\mathcal{S}$ je uzavřen na konečné průniky. Z toho již vyplyne, že $\delta\mathcal{S}$ je σ-algebra, a tedy $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$. (Skutečně, není těžké ověřit, že každý Dynkinův systém, který je uzavřený na konečné průniky, již je σ-algebrou.)

Položme

$$\mathcal{D} := \{D \in \delta\mathcal{S} : D \cap S \in \delta\mathcal{S} \text{ pro každou } S \in \mathcal{S}\}.$$

Z předpokladu věty víme, že $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$. Ukážeme, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém. (i) Zřejmě $X \in \mathcal{D}$. (ii) Je-li $D \in \mathcal{D}$ a $S \in \mathcal{S}$, pak

$$(X \setminus D) \cap S = S \setminus (S \cap D) \in \delta\mathcal{S},$$

tedy $X \setminus D \in \mathcal{D}$. (iii) Jsou-li $D_n \in \mathcal{D}$ po dvou disjunktní a $S \in \mathcal{S}$, pak

$$(\bigcup_n D_n) \cap S = \bigcup_n (D_n \cap S) \in \delta\mathcal{S},$$

tedy $\bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ je tedy Dynkinův systém a musí se tudíž shodovat se $\sigma\mathcal{S}$.

Dále položme

$$\mathcal{E} := \{E \in \delta\mathcal{S} : E \cap D \in \delta\mathcal{S} \text{ pro každou } D \in \delta\mathcal{S}\}.$$

Z dokázané rovnosti $\mathcal{D} = \delta\mathcal{S}$ plyne $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ je rovněž Dynkinův systém (to se dokáže stejně, jako pro systém $\mathcal{D}$). Platí tedy také $\mathcal{E} = \delta\mathcal{S}$, což znamená, že $\delta\mathcal{S}$ je uzavřen na konečné průniky, a důkaz je hotov. $\square$

Věta 7.3 (Věta o jednoznačnosti míry) *Nechť je množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ uzavřen na konečné průniky a μ, ν nechť jsou dvě míry na $\sigma\mathcal{S}$ takové, že $\mu(S) = \nu(S)$ pro každou $S \in \mathcal{S}$. Nechť dále existují množiny $A_n \in \mathcal{S}$ $(n \in \mathbb{N})$ takové, že $A_n \nearrow X$ a $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\mu = \nu$ na $\sigma\mathcal{S}$.*

Důkaz: (1) Předpokládejme, nejprve, že μ je konečná. Množina

$$\mathcal{D} := \{A \in \sigma\mathcal{S} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

je Dynkinův systém (vlastnost (i) plyne z $\mu(X) = \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \nu(A_n) = \nu(X)$, vlastnosti (ii) a (iii) pak ze (spočetné) aditivity míry). Protože $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ podle předpokladu, musí být $\mathcal{D} = \delta\mathcal{S}$. Podle Věty 7.2 je ovšem $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$, a tedy μ a ν se shodují na $\sigma\mathcal{S}$.

(2) Je-li μ nekonečná, položíme

$$\mathcal{D}_n := \{A \in \sigma\mathcal{S} : \mu(A \cap A_n) = \nu(A \cap A_n)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Stejně jako v části (1) se ověří, že $\mathcal{D}_n$ je Dynkinův systém obsahující $\mathcal{S}$, a tedy $\mathcal{D}_n = \sigma\mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$. Ze spojitosti míry pak pro libovolnou $A \in \sigma\mathcal{S}$ dostaneme

$$\mu(A) = \lim_n \mu(A \cap A_n) = \lim_n \nu(A \cap A_n) = \nu(A),$$

čímž je důkaz ukončen. $\square$

Příklad: Je-li μ míra na $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ taková, že $\mu(I) = \text{délka}(I)$ pro každý omezený interval I, pak nutně $\mu = \lambda^1$.

8 Součin měr a Fubiniova věta

Mějme dva prostory $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ se σ-konečnými měrami.

Definice 8.1 *Měřitelným obdélníkem* rozumíme množinu $A \times B \subset X \times Y$, kde $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$. σ-algebru

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

nazýváme *součinovou σ-algebrou* na prostoru $X \times Y$.

Pro množinu $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ značíme

$$\begin{aligned} E_x &:= \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \quad x \in X, \\ E^y &:= \{x \in X : (x, y) \in E\}, \quad y \in Y \end{aligned}$$

řezy množiny E.

Tvrzení 8.1 *Nechť $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Pak*

1. *$E_x \in \mathcal{B}$ pro všechna $x \in X$,*
2. *funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná na $(X, \mathcal{A})$.*

Důkaz: 1. Pro libovolné $x \in X$ je $\{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : E_x \in \mathcal{B}\}$ zřejmě σ-algebra obsahující všechny měřitelné obdélníky, tedy musí splývat se součinovou σ-algebrou.

2. Zvolme pevně libovolnou množinu $B_0 \in \mathcal{B}$ s mírou $\nu(B_0) < \infty$. Označme

$$\mathcal{D} := \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : x \mapsto \nu(E_x \cap B_0) \text{ je měřitelná}\}.$$

Zřejmě $\mathcal{D}$ obsahuje všechny měřitelné obdélníky, a snadno se ověří, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém. $\mathcal{D}$ tedy obsahuje δ-obal všech měřitelných obdélníků, a protože měřitelné obdélníky jsou uzavřené na konečné průniky, jejich δ-obal je totožný se σ-obalem, a tedy $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Protože ν je σ-konečná, existují množiny $B_n \in \mathcal{B}$, $\nu(B_n) < \infty$, $B_n \nearrow Y$, $n \to \infty$. Pak pro libovolnou $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ platí $\nu(E_x) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_x \cap B_n)$, a tedy funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná (jako limita měřitelných funkcí). □

Věta 8.2 (Existence a jednoznačnost součinové míry) *Existuje právě jedna míra $\mu \otimes \nu$ na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ s vlastností*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B), \quad A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}$$

(klademe $0 \cdot \infty = 0$).

Důkaz: Pro $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ položme

$$(\mu \otimes \nu)(E) := \int \nu(E_x)\, d\mu(x). \tag{1}$$

Nejprve ukážeme, že $\mu \otimes \nu$ je míra na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Zřejmě $(\mu \otimes \nu)(\emptyset) = 0$. Jsou-li $E_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ po dvou disjunktní, platí

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \nu)(\bigcup_n E_n) &= \int \nu((\bigcup_n E_n)_x)\, d\mu(x) = \int \nu(\bigcup_n (E_n)_x)\, d\mu(x) \\ &= \int \sum_n \nu((E_n)_x)\, d\mu(x) = \sum_n (\mu \otimes \nu)(E_n)\end{aligned}$$

(využili jsme faktu, že řezy disjunktních množin jsou opět disjunktní). Tedy $\mu \otimes \nu$ je míra.

Z definice je zřejmé, že pro měřitelný obdélník $A \times B$ je $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Zbývá ukázat jednoznačnost. Použijeme Větu 7.3. Systém všech měřitelných obdélníků je uzavřen na konečné průniky a součinová míra je na měřitelných obdélnících jednoznačně určena. Protože μ a ν jsou σ-konečné míry, existují množiny $A_n \in \mathcal{A}$, $\mu(A_n) < \infty$, $A_n \nearrow X$, a $B_n \in \mathcal{B}$, $\nu(B_n) < \infty$, $B_n \nearrow Y$, $n \to \infty$. Měřitelné obdélníky $C_n := A_n \times B_n$ pak splňují $(\mu \otimes \nu)(C_n) < \infty$ a $C_n \nearrow X \times Y$, předpoklady Věty 7.3 jsou tedy splněny. □

Definice 8.2 (Obraz míry) Buď $\varphi : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ měřitelné zobrazení a μ míra na $(E, \mathcal{E})$. Pak množinová funkce

$$\mu\varphi^{-1} : B \mapsto \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{F},$$

je míra na $(F, \mathcal{F})$ a nazýváme ji *obrazem míry* μ při zobrazení φ.

Tvrzení 8.3 (Symetrie součinové míry) *Platí $\nu \otimes \mu = (\mu \otimes \nu)\tau^{-1}$, kde $\tau : X \times Y \to Y \times X$ je záměna souřadnic, tedy $\tau : (x, y) \mapsto (y, x)$.*

Důkaz: Nejprve ověříme, že $\tau^{-1}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$. Toto snadno plyne z Věty 3.1 (ii), neboť $\tau^{-1}(\sigma\mathcal{S}) = \sigma(\tau^{-1}\mathcal{S})$, kde $\mathcal{S}$ značí systém všech měřitelných obdélníků v $X \times Y$.

Míry $\nu \otimes \mu$ a $(\mu \otimes \nu)\tau^{-1}$ se shodují na měřitelných obdélnících, tedy se rovnají podle předchozí věty. □

Důsledek 8.4 *Platí*

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int \mu(E^y)\, d\nu(y), \quad E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Důkaz: Platí

$$(\mu \otimes \nu)(E) = (\nu \otimes \mu)(\tau^{-1}(E)) = \int \mu((\tau^{-1}E)_y)\, d\nu(y) = \int \mu(E^y)\, d\nu(y),$$

využili jsme předchozího tvrzení a vztahu (1). □

Věta 8.5 (Fubiniova věta) *Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$ platí:*

$$\int f\, d(\mu \otimes \nu) = \int \left(\int f(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Důkaz:

1. Je-li f charakteristickou funkcí množiny ze součinové σ-algebry, plyne rovnost z (1) a Důsledku 8.4.

2. Pro jednoduchou měřitelnou funkci $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{E_i}$ máme

$$\begin{aligned}
\int s\, d(\mu \otimes \nu) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \int \nu((E_i)_x)\, d\mu(x) \\
&= \int \sum_{i=1}^k \alpha_i \nu((E_i)_x)\, d\mu(x) \\
&= \int (\int s(x, y)\, d\nu(y))\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

   Z uvedeného výpočtu rovněž plyne, že funkce $x \mapsto \int s(x, y)\, d\nu(y)$ je měřitelná pro libovolné $y \in Y$. Druhá rovnost se odvodí analogicky.

3. Buď $f \geq 0$ měřitelná a $s_n \nearrow f$ jednoduché měřitelné funkce. Pak podle Leviho věty
$$\int s_n(x,y)\,d\nu(y) \nearrow \int f(x,y)\,d\nu(y), \quad x \in X.$$
Protože integrály na levé straně jsou měřitelnými funkcemi proměnné x, i integrál na pravé straně je měřitelnou funkcí v x a opětovným použitím Leviho věty dostaneme
$$\int\int s_n(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) \nearrow \int\int f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x).$$
Podle již dokázané části 2 se integrál na levé straně shoduje s
$$\int s_n\,d(\mu\otimes\nu) \nearrow \int f\,d(\mu\otimes\nu),$$
čímž dostáváme první z obou dokazovaných rovností (a druhá opět plyne analogicky).

4. Je-li $f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}^*(\mu\otimes\nu)$, ověříme rovnost snadno pomocí příslušných rovností pro f^+ a f^-.

□

Příklad: Uvažujme $X = Y = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $\mu = \nu$ je aritmetická míra. Definujme funkci $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ následovně:
$$f(z_1,z_2) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } z_2 = z_1 \geq 0 \text{ nebo } z_2 = z_1 - 1 \leq -1, \\ -1 & \text{pokud } z_2 = z_1 < 0 \text{ nebo } z_2 = z_1 - 1 > -1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
Platí
$$\int\int f(z_1,z_2)d\mu(z_1)\,d\mu(z_2) = \sum_{z_2}\sum_{z_1} f(z_1,z_2) = 0,$$
ale
$$\int\int f(z_1,z_2)d\mu(z_2)\,d\mu(z_1) = \sum_{z_1}\sum_{z_2} f(z_1,z_2) = 2,$$
přitom ovšem $f \notin \mathcal{L}^*(\mu\otimes\mu)$.

Pozn.: Prostor se součinovou mírou $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \mu\otimes\nu)$ nemusí být úplný, ani když prostory $(X,\mathcal{A},\mu)$ a $(Y,\mathcal{B},\nu)$ jsou úplné. Zúplněný prostor se součinovou mírou značíme $(X\times Y, \mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}, \mu\hat{\otimes}\nu)$.

Důsledek 8.6 (Fubiniova věta pro zúplněnou součinovou míru) *Buďte $(X,\mathcal{A},\mu)$ a $(Y,\mathcal{B},\nu)$ dva úplné prostory se σ-konečnými měrami. Pak pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mu\hat{\otimes}\nu)$ platí:*
$$\int f\,d(\mu\hat{\otimes}\nu) = \int\left(\int f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int\left(\int f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y).$$

Důkaz: Rovnost nejprve dokážeme pro případ $f = \chi_E$, kde $E \in \mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$. Podle Věty 2.4 existuje $F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ taková, že $E \triangle F$ je nulová, tedy

$$\int f \, d(\mu \hat{\otimes} \nu) = (\mu \hat{\otimes} \nu)(E) = (\mu \otimes \nu)(F).$$

Podle Fubiniovy věty platí $(\mu \otimes \nu)(F) = \int \nu(F_x) \, d\mu(x)$. Ukážeme-li, že

$$\int \nu(E_x) \, d\mu(x) = \int \nu(F_x) \, d\mu(x),$$

dokážeme tím první z dvou dokazovaných rovností věty pro případ $f = \chi_E$ (druhá rovnost plyne analogicky.) K tomu stačí ukázat, že $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ μ-s.v. Z definice nulové množiny víme, že existuje $N \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ taková, že $E \triangle F \subset N$ a $(\mu \otimes \nu)(N) = 0$. Ze vztahu (1) plyne $\nu(N_x) = 0$ μ-s.v. Dále zřejmě platí

$$E_x \triangle F_x = (E \triangle F)_x \subset N_x,$$

tedy také $\nu(E_x \triangle F_x) = 0$ μ-s.v., a tudíž $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ μ-s.v.

Dále lze postupně ukázat platnost rovnosti pro jednoduché měřitelné funkce, nezáporné měřitelné funkce a funkce z $\mathcal{L}^*(\mu \hat{\otimes} \nu)$, stejně jako v důkazu Věty 8.5.
□

Věta 8.7 (Součin Lebesgueových měr) *Pro $p, q \in \mathbb{N}$ platí:*

(i) $\mathcal{B}^{p+q} = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$,

(ii) $\lambda^{p+q} = \lambda^p \otimes \lambda^q$.

Důkaz: (i). Každý otevřený $(p+q)$-kvádr je kartézským součinem otevřeného p-kvádru a otevřeného q-kvádru. Nechť $\mathcal{Q}^k$ značí systém všech otevřených k-kvádrů. Pak platí

$$\mathcal{B}^{p+q} = \sigma\{U \times V : U \in \mathcal{Q}^p, V \in \mathcal{Q}^q\} \subset \sigma\{A \times B : A \in \mathcal{B}^p, B \in \mathcal{B}^q\} = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q.$$

Pro druhou inkluzi stačí ukázat, že $A \times B \in \mathcal{B}^{p+q}$ kdykoliv $A \in \mathcal{B}^p$ a $B \in \mathcal{B}^q$. Označme

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathcal{B}^p : A \times V \in \mathcal{B}^{p+q} \text{ kdykoliv } F \in \mathcal{Q}^q\}.$$

Zřejmě $\mathcal{Q}^p \subset \mathcal{D}_1$ a snadno lze ukázat, že $\mathcal{D}_1$ je σ-algebra. Platí tedy $\mathcal{D}_1 = \mathcal{B}^p$. Dále označme

$$\mathcal{D}_2 := \{B \in \mathcal{B}^q : A \times B \in \mathcal{B}^{p+q} \text{ kdykoliv } A \in \mathcal{B}^p\}.$$

Platí $\mathcal{Q}_q \subset \mathcal{D}_2$ (protože $\mathcal{D}_1 = \mathcal{B}^p$) a $\mathcal{D}_2$ je opět σ-algebra, tudíž $\mathcal{D}_2 = \mathcal{B}^q$. σ-algebra $\mathcal{B}^{p+q}$ tedy obsahuje všechny měřitelné obdélníky v $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, a musí tedy obsahovat i $\mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$.

(ii). Míry λ^{p+q} a $\lambda^p \otimes \lambda^q$ se shodují na otevřených kvádrech z $\mathcal{Q}^{p+q}$. Systém $\mathcal{Q}^{p+q}$ je uzavřen na konečné průniky, generuje $\mathcal{B}^{p+q}$ a existuje posloupnost otevřených kvádrů $Q_i \nearrow \mathbb{R}^{p+q}$ konečné míry, tedy λ^{p+q} a $\lambda^p \otimes \lambda^q$ se shodují i na $\mathcal{B}^{p+q}$ podle Věty 7.3. □

V dalším budeme symbolem $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^k)$ zkráceně značit prostor $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_0^k, \lambda^k)$.

Důsledek 8.8 (Fubiniova věta v $\mathbb{R}^{p+q}$) *Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ platí*

$$\int f(x,y)\, d(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\, dy \right) dx = \int \left(\int f(x,y)\, dx \right) dy,$$

kde píšeme stručně $dx := d\lambda^p(x)$, $dy := d\lambda^q(y)$, $d(x,y) := d\lambda^{p+q}(x,y)$.

Důsledek 8.9 *Pro množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí*

$$\lambda^{p+q}(A) = \int_{\pi_1 A} \lambda^q(A_x)\, dx = \int_{\pi_2 A} \lambda^p(A^y)\, dy,$$

kde $\pi_1 : (x,y) \mapsto x$ a $\pi_2 : (x,y) \mapsto y$ jsou projekce.

Důsledek 8.10 *Pro funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ a množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí*

$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\pi_1 A} \left(\int_{A_x} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\pi_2 A} \left(\int_{A^y} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Příklad: Pro jednotkovou kouli $B_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ v $\mathbb{R}^3$ dostáváme podle Důsledku 8.9

$$\lambda^3(B_1) = \int_{-1}^{1} \pi(1 - z^2)\, dz = \frac{4}{3}\pi.$$

9 Věta o substituci

Připomenutí: Pro funkci $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ a diferencovatelnou surjektivní monotónní funkci $\varphi : (a,b) \to (\alpha, \beta)$ platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\, dx = \int_\alpha^\beta f(y)\, dy,$$

má-li jedna strana smysl jako Newtonův integrál.

Pozn.: Lebesgueova míra λ^n je translačně invariantní (tedy $\lambda^n(B+z) = \lambda^n(B)$ kdykoliv $B \in \mathcal{B}^n$ a $z \in \mathbb{R}^n$). To plyne z věty o jednoznačnosti míry, neboť λ^n a míra $\mu(B) := \lambda^n(B+z)$, $B \in \mathcal{B}^n$, se shodují na otevřených kvádrech.

Tvrzení 9.1 *Buď $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ regulární lineární zobrazení a $A \in \mathcal{B}^n$. Pak $L(A) \in \mathcal{B}^n$ a platí $\lambda^n(L(A)) = |\det L|\lambda^n(A)$.*

Důkaz: Každé lineární zobrazení mezi konečněrozměrnými prostory je spojité. Protože L je regulární, existuje (spojité) inverzní zobrazení L^{-1}, a tedy $L(A) = (L^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{B}^n$.

Podle známé věty z lineární algebry lze každé regulární lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vyjádřit jako složení konečně mnoha "elementárních" lineárních zobrazení jednoho ze tří typů:

(i) $L_1 : (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ (tedy L_1 prohazuje i-tou a j-tou souřadnici vektoru);

(ii) $L_2 : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + bx_1)$ ($b \in \mathbb{R}$) (L_2 přičte k n-té souřadnici b-násobek první souřadnice);

(iii) $L_3 : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, ax_n)$ ($a \neq 0$) (L_3 vynásobí n-tou souřadnici nenulovým faktorem a).

Protože složené lineární zobrazení odpovídá součinu příslušných matic, a determinant součinu je součinem determinantu jednotlivých matic, stačí dokazovanou udentitu ukázat pro případy $L = L_1, L_2$ a L_3.

Míry $\lambda^n L_1$ a λ^n se shodují na systému otevřených kvádrů. Podle věty o jednoznačnosti míry se tedy shodují i na Borelovské σ-algebře, a máme tedy $\lambda^n(L_1(A)) = \lambda^n(A) = |\det L_1|\lambda^n(A)$, $A \in \mathcal{B}^n$.

Podle Fubiniovy věty platí

$$\lambda^n(L_2(A)) = \int_{\Pi_{n-1}(A)} \lambda^1 \left((L_2(A))_{(x_1,\ldots,x_{n-1})}\right) \, d(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

kde $\Pi_{n-1} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Pro řez množiny $L_2(A)$ pak z tvaru L_2 dostáváme

$$(L_2(A))_{(x_1,\ldots,x_{n-1})} = A_{(x_1,\ldots,x_{n-1})} + bx_1,$$

a protože λ^1 je translačně invariantní a $\Pi_{n-1}(L_2(A)) = \Pi_{n-1}(A)$, máme

$$\lambda^n(L_2(A)) = \int_{\Pi_{n-1}(A)} \lambda^1 \left(A_{(x_1,\ldots,x_{n-1})}\right) \, d(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \lambda^n(A).$$

Jelikož $|\det L_2| = 1$, ověřili jsme tím rovnost pro L_2.

Míry λ^n a $\mu(A) := |a|^{-1}\lambda^n(L_3(A))$ se shodují na systému otevřených kvádrů, proto se shodují podle věty o jednoznačnosti i na borelovských množinách. Platí tedy $\lambda^n(L_3(A)) = |a|\lambda^n(A) = |\det L_3|\lambda^n(A)$. Tím je důkaz ukončen. □

Důsledek 9.2 (Lebesgueova míra je izometricky invariantní) *Je-li $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrie (tzn. $\|S(x) - S(y)\| = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$), pak $\lambda^n(S(A)) = \lambda^n(A)$, $A \in \mathcal{B}^n$.*

Důkaz: Podle věty z lineární algebry lze každou izometrii v $\mathbb{R}^n$ zapsat ve tvaru

$$S : x \mapsto b + R(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

kde $b \in \mathbb{R}^n$ ("posunutí") a R je ortogonální lineární zobrazení (tzn. $R^T R = I$). Protože $|\det R| = 1$ a λ^n je translačně invariantní, dostáváme $\lambda^n(S(A)) = \lambda^n(A)$ z Tvrzení 9.1. □

Důsledek 9.3 *Je-li $W \subset \mathbb{R}^n$ afinní podprostor dimenze menší než n, platí $\lambda^n(W) = 0$.*

Důkaz: Plyne z faktu, že vhodné izometrické zobrazení zobrazí W na lineární podprostor generovaný prvními $k < n$ vektory kanonické báze $\mathbb{R}^n$. $\square$

Důsledek 9.4 *Tvrzení 9.1 platí i bez předpokladu regularity zobrazení L.*

Důkaz: Je-li L singulární, je $L(\mathbb{R}^n)$ podprostor dimenze menší než n, a zároveň $\det L = 0$. $\square$

Důsledek 9.5 (Homogenita Lebesgueovy míry)

$$\lambda^n(rA) = |r|^n \lambda^n(A), \quad r \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{B}^n.$$

Definice 9.1 Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : U \to \mathbb{R}^n$ zobrazení třídy C^1. Pak $\mathcal{J}f(x) := \det Df(x)$ je *Jakobián funkce f v bodě x*, $x \in U$.

Definice 9.2 Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Zobrazení $f : U \to \mathbb{R}^n$ je *difeomorfismus*, je-li prosté, třídy C^1 a platí-li $\mathcal{J}f(x) \neq 0$, $x \in U$.

Pozn.: Z věty o inverzním zobrazení plyne, že je-li $f : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus, je obraz $f(U)$ otevřená množina a f^{-1} je třídy C^1 na $f(U)$.

Věta 9.6 (Věta o substituci) *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus a $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_U f(\varphi(x))\, |\mathcal{J}\varphi(x)|\, dx = \int_{\varphi(U)} f(y)\, dy,$$

má-li jedna strana smysl.

[BEZ DŮKAZU]

Důsledek 9.7 *Je-li navíc $B \subset \varphi(U)$ Lebesgueovsky měřitelná množina, platí*

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x))\, |\mathcal{J}\varphi(x)|\, dx = \int_B f(y)\, dy,$$

má-li jedna strana smysl.

Příklad: Zobrazení $\varphi : (r, t) \mapsto (r \cos t, r \sin t)$ je difeomorfismus na $U = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$, $\mathcal{J}\varphi(r, t) = r$ a platí $\lambda^2(\mathbb{R}^2 \setminus \varphi(U)) = 0$, proto

$$\lambda^2(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} r\, d(r, t), \quad B \in \mathcal{B}_0^2.$$

10 Konstrukce Lebesgueovy míry

Definice 10.1 (Vnější míra) Nechť X je neprázdná množina. Pak funkce $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ je *vnější míra* na X, jestliže

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonie),

(iii) $A_n \subset X$ $(n \in \mathbb{N}) \implies \mu^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$ (spočetná subaditivita).

Příklady:

1. Nulová míra, Diracova míra v bodě nebo aritmetická míra jsou rovněž vnější míry.

2.
$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0 & \text{pokud } A = \emptyset, \\ 1 & \text{pokud } A \neq \emptyset \end{cases}$$

3.
$$\lambda^*(A) := \inf\left\{\sum_n \text{délka}(I_n) : A \subset \bigcup_n I_n,\ I_n \text{ otevř. int.}\right\},\ A \subset \mathbb{R},$$

   je vnější míra na $\mathbb{R}$. (Cvičení)

Definice 10.2 Řekneme, že množina $A \subset X$ je μ^**-měřitelná*, jestliže

$$\forall T \subset X : \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A).$$

Značíme $\mathcal{A}_{\mu^*} := \{A \subset X : A \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná}\}$.

Pozn.: Nerovnost $\mu^*(T) \leq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$ platí vždy (ze subaditivity), proto v definici lze ekvivalentně požadovat

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A), \quad T \subset X.$$

Pozn.: Je-li μ^* vnější míra na X a $Y \subset X$, pak restrikce $\mu^* \lfloor Y : A \mapsto \mu^*(A \cap Y)$ je rovněž vnější míra na X a platí $\mathcal{A}_{\mu^*} \subset \mathcal{A}_{\mu^* \lfloor Y}$.

Věta 10.1 (Caratheodory) *$\mathcal{A}_{\mu^*}$ je σ-algebra, $\mu := \mu^* | \mathcal{A}_{\mu^*}$ je míra a prostor $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ je úplný.*

Důkaz:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ (zřejmé)

2. $A \in \mathcal{A}_{\mu^*} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ (zřejmé z definice)

3. $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*} \implies A \cap B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$:

   Pro libovolnou množinu $T \subset X$ platí:

$$\begin{aligned}
\mu^*(T) &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A), \\
\mu^*(T \cap A) &= \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B), \\
\mu^*(T \setminus (A \cap B)) &= \mu^*(T \setminus (A \cap B) \cap A) + \mu^*(T \setminus (A \cap B) \setminus A) \\
&= \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A).
\end{aligned}$$

   Dosazením z druhé a čtvrté rovnosti do první dostaneme

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \setminus (A \cap B)),$$

   tedy $A \cap B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Z dokázaných vlastností už plyne, že $\mathcal{A}_{\mu^*}$ je algebra.

4. μ^* je σ-aditivní na $\mathcal{A}_{\mu^*}$:

   Buďte $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ po dvou disjunktní. Ukážeme, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Protože A je μ^*-měřitelná, volbou $T = A_1 \cup A_2$ dostaneme

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

   Tedy μ^* je konečně aditivní na $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Platí tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i) = \lim_{n \to \infty} \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \leq \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

   Opačná nerovnost plyne ze spočetné subaditivity, platí tedy $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

5. $\mathcal{A}_{\mu^*}$ je uzavřeno na disjunktní spočetná sjednocení:

   Buďte $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ po dvou disjunktní a $T \subset X$. Platí ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}
\mu^*(T) &= \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) + \mu^* \left(T \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \\
&\geq \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + (\mu^* \lfloor T) \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \\
&= \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + \sum_{i=1}^{n} (\mu^* \lfloor T)(A_i)
\end{aligned}$$

Využili jsme faktu, že $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*\lfloor T}$, a toho, že $\mu^*\lfloor T$ je (σ-)aditivní na $\mathcal{A}_{\mu^*\lfloor T}$, podle již dokázané části 4. Limitním přechodem $n \to \infty$ pak dostaneme

$$\begin{aligned}\mu^*(T) &\geq \mu^*\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*\lfloor T)(A_i) \\ &= \mu^*\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \mu^*\left(T \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).\end{aligned}$$

Tedy $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Z dokázaného již plyne, že $\mathcal{A}_{\mu^*}$ je σ-algebra a μ^* je míra na $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

6. $\mu^*(A) = 0 \implies A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$:
   Jestliže $\mu^*(A) = 0$, pak
   $$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \setminus A) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A),$$
   tedy $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Všechny nulové množiny jsou tedy μ^*-měřitelné.

$\square$

Příklady:

1. μ^* je nulová míra, Diracova míra v bodě nebo aritmetická míra na množině X: $\mathcal{A}_{\mu^*} = \mathcal{P}(X)$.
2. $\mu^*(A) := \begin{cases} 0 & \text{pokud } A = \emptyset, \\ 1 & \text{pokud } A \neq \emptyset \end{cases} \implies \mathcal{A}_{\mu^*} = \{\emptyset, X\}$.

Definice 10.3 (Metrická vnější míra) Buď (X, ρ) metrický prostor. Řekneme, že vnější míra μ^* na X je *metrická*, jestliže pro dvě množiny $A, B \subset X$ splňující $\operatorname{dist}(A, B) > 0$ platí

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Zde $\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{\rho(a, b) :\, a \in A,\, b \in B\}$.

Věta 10.2 *Nechť μ^* je metrická vnější míra na metrickém prostoru (X, ρ). Pak $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$.*

Důkaz: Buď $F \subset X$ uzavřená. Ukážeme, že $F \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Označme

$$F_\varepsilon := \{x \in X :\, \rho(x, F) \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Nechť je dána $T \subset X$. Ověříme, že

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap F) + \mu^*(T \setminus F). \tag{2}$$

Můžeme předpokládat, že $\mu^*(T) < \infty$ (jinak nerovnosti zřejmě platí). Protože $\mathrm{dist}(T \cap F, T \setminus F_\varepsilon) \geq \varepsilon > 0$, platí

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap F) + \mu^*(T \setminus F_\varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

protože μ^* je metrická. Ukážeme, že

$$\mu^*(T \setminus F_{1/j}) \to \mu^*(T \setminus F),\ j \to \infty. \tag{3}$$

Z toho už bude plynout (2). Označme

$$D_i := (F_{1/i} \setminus F_{1/(i+1)}) \cap T, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Platí

$$T \setminus F = (T \setminus F_{1/j}) \cup \bigcup_{i=j}^{\infty} D_i,$$

a tedy ze spočetné subaditivity μ^* plyne

$$\mu^*(T \setminus F) \leq \mu^*(T \setminus F_{1/j}) + \sum_{i=j}^{\infty} \mu^*(D_i).$$

Ukážeme, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(D_i) < \infty. \tag{4}$$

Z toho již bude plynout (3), a tedy i (2). Je-li $|i - j| > 2$ je $\mathrm{dist}(D_i, D_j) > 0$ a tedy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mu^*(D_{2i}) &= \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} D_{2i}\right) \leq \mu^*(T) < \infty, \\
\sum_{i=1}^{n} \mu^*(D_{2i-1}) &= \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} D_{2i-1}\right) \leq \mu^*(T) < \infty.
\end{aligned}$$

Z obou nerovností již plyne (4) a důkaz je tedy hotov. □

Definice 10.4 Symbolem $\mathcal{O}_n$ budeme značit množinu všech otevřených omezených kvádrů v $\mathbb{R}^n$ (včetně prázdné množiny). Objem kvádru $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \in \mathcal{O}_n$, budeme značit

$$v(I) := (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n).$$

Tvrzení 10.3 *Buďte $I, I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{O}_n$.*

(i) *Je-li $I \subset \overline{I_1} \cup \cdots \cup \overline{I_k}$, platí $v(I) \leq v(I_1) + \cdots + v(I_k)$.*

(ii) *Je-li $I = \overline{I_1} \cup \cdots \cup \overline{I_k}$ a jsou-li kvádry $I_1, \ldots, I_k$ po dvou disjunktní, platí $v(I) = v(I_1) + \cdots + v(I_k)$.*

Důkaz:

1. Nechť $I = (a_1, b_1)\times\cdots\times(a_n, b_n)$, $\mathcal{D}_i$ je dělení intervalu (a_i, b_i), $i = 1, \dots, n$, a označme symbolem $\mathcal{J}$ systém všech otevřených kvádrů $J_1 \times \cdots \times J_n$, kde J_i je otevřený interval z dělení $\mathcal{D}_i$, $i = 1, \dots, n$. Pak zřejmě
$$\overline{I} = \bigcup_{J\in\mathcal{J}} \overline{J}, \quad v(I) = \sum_{J\in\mathcal{J}} v(J).$$
2. Jsou-li $I_1, \dots, I_k$ jako v (ii), převedeme situaci snadno na případ uvažovaný v 1. Tím je dokázán bod (ii).
3. (i) plyne z (ii): z libovolného pokrytí kvádru I kvádry $I_1, \dots, I_k$ snadno vyrobíme disjunktní pokrytí.

□

Definice 10.5 Pro množinu $E \subset \mathbb{R}^n$ klademe
$$\lambda^{n*}(E) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) :\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ I_i \in \mathcal{O}_n,\ i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Tvrzení 10.4 *Pro $E \subset \mathbb{R}^n$ a $\delta > 0$ platí $\lambda^{n*}(E) = \lambda^{n*}_\delta(E)$, kde*
$$\lambda^{n*}_\delta(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) :\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ I_i \in \mathcal{O}_n,\ \mathrm{diam}(I_i) < \delta,\ i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Důkaz: Nerovnost $\lambda^{n*}(E) \le \lambda^{n*}_\delta(E)$ je zřejmá. Dokažme opačnou nerovnost. Nechť $\lambda^{n*}(E) < \infty$ (jinak by nerovnost zřejmě platila), a zvolme $\varepsilon > 0$. Z definice $\lambda^{n*}(E)$ existují $I_1, I_2, \dots \in \mathcal{O}_n$ takové, že $A \subset \bigcup_i I_i$ a
$$\sum_i v(I_i) < \lambda^{n*}(A) + \varepsilon.$$

Každý z kvádrů I_i můžeme rozdělit na konečný počet disjunktních kvádrů $J_i^1, \dots, J_i^{k(i)}$ s diametry menšími než δ, přitom $\overline{I_i} = \overline{I_i^1} \cup \cdots \cup \overline{I_i^{k(i)}}$. Podle Tvrzení 10.3 platí $v(I_i) = v(J_i^1) + \cdots + v(I_i^{k(i)})$. Zřejmě existují $I_i^j \in \mathcal{O}_n$ takové, že $\overline{J_i^j} \subset I_i^j$, $\mathrm{diam}\, I_i^j < \delta$ a $v(I_i^j) < v(J_i^j) + \varepsilon/(k(i)2^i)$, $j = 1, \dots, k(i)$, $i \in \mathbb{N}$. Pak $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k(i)} I_i^j$, a tedy
$$\lambda^{n*}_\delta(A) \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k(i)} v(I_i^j) < \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) + \varepsilon < \lambda^{n*}(A) + 2\varepsilon.$$

Protože tato nerovnost platí pro libovolné $\varepsilon > 0$, platí i $\lambda^{n*}_\delta(A) \le \lambda^{n*}(A)$. □

Věta 10.5 λ^{n*} *je metrická vnější míra na $\mathbb{R}^n$ a platí*
$$\lambda^{n*}(I) = v(I), \quad I \in \mathcal{O}_n.$$

Důkaz: Množinová funkce λ^{n*} je zřejmě monotónní a platí $\lambda^{n*}(\emptyset) = 0$. Ukážeme spočetnou subaditivitu. Buďte $E_i \subset \mathbb{R}^n$ a předpokládejme, že $\lambda^{n*}(E_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle definice λ^{n*} existují $I_i^j \in \mathcal{O}_n$ takové, že $E_i \subset \bigcup_j I_i^j$ a $\sum_j v(I_i^j) < \lambda^{n*}(E_i) + \varepsilon/2^i$, $i \in \mathbb{N}$. Pak ale platí $\bigcup_i E_i \subset \bigcup_i \bigcup_j I_i^j$, a tedy

$$\lambda^{n*}(\bigcup_i E_i) \leq \sum_i \sum_j v(I_i^j) < \sum_i \lambda^{n*}(E_i) + \varepsilon.$$

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0+$ dostáváme spočetnou subaditivitu. λ^{n*} je tedy vnější míra.

Ukážeme, že λ^{n*} je metrická. Buďte $A, B \subset \mathbb{R}^d$ takové, že $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. Ukážeme, že

$$\lambda^{n*}(A \cup B) \geq \lambda^{n*}(A) + \lambda^{n*}(B).$$

Je-li $\lambda^{n*}(A \cup B) = \infty$, nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy nadále, že $\lambda^{n*}(A \cup B) < \infty$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Tvrzení 10.4 existují $I_i \in \mathcal{O}_n$ takové, že $\operatorname{diam}(I_i) < \operatorname{dist}(A, B)/2$ a $\sum_i v(I_i) < \lambda^{n*}(A \cup B) + \varepsilon$. Označme

$$\mathcal{I}_A := \{i \in \mathbb{N} : I_i \cap A \neq \emptyset\}, \quad \mathcal{I}_B := \{i \in \mathbb{N} : I_i \cap B \neq \emptyset\}.$$

Žádný z kvádrů I_i nemůže zasáhnout obě množiny A, B, proto jsou $\mathcal{I}_A$ a $\mathcal{I}_B$ disjunktní. Dále zřejmě $A \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}_A} I_i$ a $B \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}_B} I_i$, proto

$$\lambda^{n*}(A) + \lambda^{n*}(B) \leq \sum_{i \in \mathcal{I}_A} v(I_i) + \sum_{i \in \mathcal{I}_B} v(I_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) < \lambda^{n*}(A \cup B) + \varepsilon.$$

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0+$ dostaneme požadovanou nerovnost.

Zbývá ukázat, že $\lambda^{n*}(I) = v(I)$ kdykoliv $I \in \mathcal{O}_n$. Nerovnost $\lambda^{n*}(I) \leq v(I)$ je zřejmá (stačí zvolit pokrytí $I_1 = I$, $I_2 = I_3 = \cdots = \emptyset$). Předpokládejme pro spor, že $\lambda^{n*}(I) < v(I)$. Pak existují $I_i \in \mathcal{O}_n$ takové, že $I \subset \bigcup_i I_i$ a $\sum_i v(I_i) < v(I)$. Zřejmě existuje $J \in \mathcal{O}_n$ takový, že $\overline{J} \subset I$ a $\sum_i v(I_i) < v(J)$. Protože $\overline{J}$ je kompaktní, existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\overline{J} \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k$. Pak ale $v(J) \leq v(I_1) + \cdots + v(I_k)$ podle Tvrzení 10.3, což je spor. □

Pozn.: Z předchozích tří vět plyne, že $\mathcal{B}^n \subset \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ a $\lambda^n = \lambda^{n*}|\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ je n-rozměrná Lebesgueova míra. Tím je dokázána existence ve Větě 2.5. Jednoznačnost plyne z Důsledku 7.3, důkaz Věty 2.5 je tedy kompletní.

Věta 10.6 (Regularita Lebesgueovy míry) *Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$. Je ekvivalentní:*

(i) $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$.

(ii) *pro každé $\varepsilon > 0$ existují G otevřená, F uzavřená, $F \subset E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$.*

(iii) *existují množiny $A, B \in \mathcal{B}^n$, $A \subset E \subset B$, $\lambda^n(B \setminus A) = 0$.*

(iv) $E \in \mathcal{B}_0^n$.

Důkaz: (i) $\Longrightarrow$ (ii): Předpokládejme nejprve, že $\lambda^n(E) < \infty$. Podle definice λ^{n*} existují $I_i \in \mathcal{O}_n$ takové, že $E \subset \bigcup_i I_i$ a $\sum_i v(I_i) < \lambda^n(E) + \varepsilon/2$. Pak $G := \bigcup_i I_i$ je otevřená množina obsahující E a platí $\lambda^n(G \setminus E) < \varepsilon/2$.

Je-li $\lambda^n(E) = \infty$, platí $E = \bigcup_m E_m$, kde $E_m := [-m, m]^n \cap E$ má konečnou míru, $m = 1, 2, \dots$. Ke každé E_m najdeme otevřenou množinu $G_m \supset E_m$, $\lambda(G_m \setminus E_m) < \varepsilon/2^{m+1}$. Pak otevřená množina $G := \bigcup_m G_m$ obsahuje E a platí

$$\lambda^n(G \setminus E) \leq \sum_m \lambda^n(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Komplement E^C množiny E je také měřitelný a existuje tedy otevřená množina $H \supset E^C$ taková, že $\lambda^n(H \setminus E^C) = \lambda^n(E \setminus H^C) < \varepsilon/2$. Množina $F := H^C$ je uzavřená a platí $F \subset E \subset G$ a

$$\lambda^n(G \setminus F) = \lambda^n(G \setminus E) + \lambda^n(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Pro každé $j \in \mathbb{N}$ najdeme otevřenou množinu $G_j \supset E$ a uzavřenou $F_j \subset E$ tak, že $\lambda^n(G_j \setminus F_j) < j^{-1}$. Pak $A := \bigcup_j F_j$ a $B := \bigcap_j G_j$ jsou borelovské množiny a platí

$$\lambda^n(B \setminus A) \leq \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}, \quad j \in \mathbb{N},$$

tedy $\lambda^n(B \setminus A) = 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Jsou-li $A \subset E \subset B$ jako v (iii), je zřejmě symetrická diference $E \triangle A$ nulová množina, a tedy $E \in \mathcal{B}_0^n$ podle Věty 2.4.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): σ-algebra $\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ obsahuje borelovské množiny i nulové množiny, obsahuje tedy i zúplněnou σ-algebru $\mathcal{B}_0^n$. □

Věta 10.7 (Luzin) *Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lebesgueovsky měřitelná funkce a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená taková, že $\lambda^n(G) < \varepsilon$ a restrikce $f|G^C$ je spojitá.*

Pozn.: Funkce f nemusí být spojitá v žádném bodě, pouze restrikce na vhodnou množinu je spojitá (vzhledem k této množině) (viz Dirichletova funkce $f = \chi_{\mathbb{Q}}$).

Důkaz Buď $U_1, U_2, \dots$ posloupnost všech intervalů s racionálními koncovými body. Pak pro každé $j \in \mathbb{N}$ je množina $f^{-1}(U_j)$ lebesgueovsky měřitelná, tedy existují množiny $F_j \subset f^{-1}(U_j) \subset G_j$, F_j uzavřená, G_j otevřená, $\lambda^n(G_j \setminus F_j) < \varepsilon/2^j$. Množina $E := \bigcup(G_j \setminus F_j)$ je otevřená a splňuje

$$\lambda^n(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \varepsilon.$$

Pro restrikci $g : F|E^C$ dále platí

$$g^{-1}(U_j) = f^{-1}(U_j) \cap E^C = G_j \cap E^C, \quad j = 1, 2, \dots.$$

Tedy $g^{-1}(U_j)$ je otevřená podmnožina v prostoru E^C. Protože systém $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tvoří bázi topologie na $\mathbb{R}$ (tzn. každá otevřená množina je sjednocením intervalů z tohoto systému), je funkce g spojitá na E^C. □

11 Prostory L^p

Definice 11.1 Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a funkce $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná. Definujeme

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty, \\ \|f\|_\infty &:= \inf\{\alpha \ge 0 : \mu\{x \in X : |f(x) > \alpha\} = 0\}, \\ \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) &:= \{f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}^*) : \|f\|_p < \infty\}, \quad 1 \le p \le \infty. \end{aligned}$$

(Často budeme psát stručně pouze $\mathcal{L}^p(\mu)$ nebo $\mathcal{L}^p(X)$.)

Pozn.: Platí $|f| \le \|f\|_\infty$ μ-skoro všude.

Tvrzení 11.1 (Hölderova nerovnost) *Nechť $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $1 \le p, q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak $f \cdot g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ a platí*

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Důkaz: Uvažujme nejprve případ $p = 1$, $q = \infty$. Pak

$$\|fg\|_1 \int |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \le \|g\|_\infty \int |f(x)| \, d\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Dále předpokládejme, že $1 < p, g < \infty$. K důkazu nerovnosti použijeme pomocné lemma:

Lemma 11.2 (Youngovo lemma) *Je-li $a, b \ge$ a $p, q > 1$ takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pak*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz: Nechť $ab > 0$ jinak je nerovnost zřejmá). Protože logaritmus je konkávní funkce, platí

$$\log \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \ge \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q = \log a + \log b = \log(ab).$$

Z toho již plyne dokazovaná rovnost, neboť logaritmus je rostoucí funkce. □

Dokončení důkazu Hölderovy nerovnosti: Je-li $\|f\|_p = 0$ nebo $\|g\|_q = 0$, musí být $f \cdot g = 0$ s.v. a nerovnost zřejmě platí. Nechť dále $\|f\|_p > 0$ a $\|g\|_q > 0$. Podle Youngovy nerovnosti platí

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \le \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}, \quad x \in X,$$

a zintegrováním dostaneme

$$\frac{\int |f \cdot g| \, d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{\|f\|_p^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_q^q}{q\|g\|_q^q} = 1,$$

což je Hölderova nerovnost. $\square$

Věta 11.3 (Minkowského nerovnost) *Jsou-li* $1 \leq p \leq \infty$ *a* $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, *pak také* $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *a platí*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Důkaz: Je-li $p = 1$, nerovnost snadno plyne z trojúhelníkové nerovnosti $|f + g| \leq |f| + |g|$ zintegrováním. Je-li $p = \infty$, platí podle definice $|f| \leq \|f\|_\infty$ s.v. a $|g| \leq \|g\|_\infty$ s.v., tedy

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ s.v.},$$

z čehož plyne $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Nechť nyní $1 < p < \infty$. Funkce $x \mapsto x^p$ je konvexní na $(0, \infty)$, tudíž

$$\left|\frac{f + g}{2}\right|^p \leq \left(\frac{|f| + |g|}{2}\right)^p \leq \frac{|f|^p + |g|^p}{2},$$

z čehož zintegrováním dostaneme

$$\|f + g\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) < \infty.$$

Tedy $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Položme $q := \frac{p}{p-1}$ (platí tedy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Funkce $|f + g|^{p-1}$ leží v $\mathcal{L}^q(\mu)$ a podle Hölderovy nerovnosti platí

$$\int (|f| \cdot |f + g|^{p-1}) \, d\mu \leq \|f\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q,$$
$$\int (|g| \cdot |f + g|^{p-1}) \, d\mu \leq \|g\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q.$$

Sečtením obou nerovností a s využitím identity

$$\||f + g|^{p-1}\|_q = \|f + g\|_p^{p-1}$$

dostaneme

$$\int |f + g|^p \, d\mu \leq \int (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} \, d\mu \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{p-1},$$

což je Minkowského nerovnost. $\square$

Pozn.: $\mathcal{L}^p(\mu)$ je tedy vektorový prostor a $\|\cdot\|_p$ je *seminorma* (tedy splňuje vlastnosti normy, s tou výjimkou, že z $\|f\|_p = 0$ neplyne $f = 0$).

Definice 11.2 Nechť $1 \le p \le \infty$. Na množině $\mathcal{L}^p(\mu)$ definujeme ekvivalenci

$$f \sim g \iff f = g\ \mu - \text{skoro všude.}$$

Dále klademe

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)\ |_\sim$$

(faktorprostor, formálně množina tříd ekvivalence $\sim$).

Tvrzení 11.4 *Pro* $1 \le p \le \infty$ *a* $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *platí*

$$\|f - g\|_p = 0 \iff f \sim g.$$

Důkaz: Plyne z Věty 6.1.

Důsledek: $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ je normovaný lineární prostor.

Věta 11.5 *Prostor* $L^p(\mu)$ *je úplný.*

Důkaz pro $p = \infty$**:** Nechť nejprve $p = \infty$ a buď (f_n) cauchyovská posloupnost v $L^\infty(\mu)$ (přesněji řečeno, f_n jsou reprezentanti z příslušných tříd ekvivalence). Z cauchyovskosti plyne:

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n_0(k))(\forall m, n \ge n_0(k)) : \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{1}{k}.$$

Označme

$$N_k^{m,n} := \{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \ge \tfrac{1}{k}\}.$$

Podle výše uvedeného platí $\mu(N_k^{m,n}) = 0$ kdykoliv $m, n \ge n_0(k)$. Položme

$$N := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m,n \ge n_0(k)} N_k^{m,n}.$$

Zřejmě $\mu(N) = 0$. Dále pro každé $x \in X \setminus N$ je posloupnost $(f_n(x))$ cauchyovská (v $\mathbb{R}$), a tedy existuje $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$. Funkce f je měřitelná (neboť je bodovou limitou měřitelných funkcí s.v.) a pro každé každé $x \in X \setminus N$, $k \in \mathbb{N}$ a $m, n \ge n_0(k)$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \le \frac{1}{k} + |f_m(x) - f(x)|,$$

a limitním přechodem $m \to \infty$ dostaneme $|f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{k}$. Z toho ale plyne, že $\|f_n - f\|_\infty \le \frac{1}{k}$, tedy $f_n \to f$ v $L^\infty(\mu)$.

Důkaz pro $p < \infty$: Nechť opět (f_n) je cauchyovská v $L^p(\mu)$. Pak existuje vybraná podposloupnost $(g_j) \subset (f_n)$ taková, že

$$s := \sum_{j=1}^{\infty} \|g_j - g_{j+1}\|_p < \infty$$

(ke každému j najdeme n_j tak, aby $\|f_n - f_{n_j}\|_p < 2^{-j}$ kdykoliv $n \geq n_j$, a položíme $g_j = g_{n_j}$). Položme

$$h := \sum_{j=1}^{\infty} |g_j - g_{j+1}|.$$

S využitím Leviho věty (druhá rovnost) a Minkowského nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}\int h^p \, d\mu &= \int \left(\sum_{j=1}^{\infty} |g_j - g_{j+1}| \right)^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \left(\sum_{j=1}^{n} |g_j - g_{j+1}| \right)^p d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} |g_j - g_{j+1}| \right\|_p^p \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \|g_j - g_{j+1}\|_p \right)^p \leq s^p < \infty,\end{aligned}$$

tedy $h \in L^p(\mu)$ a platí $h < \infty$ μ-s.v. Pro množinu

$$M := \{x \in X : g_1(x) < \infty, \, h(x) < \infty\}$$

tedy platí $\mu(X \setminus M) = 0$ a pro každé $x \in M$ je posloupnost $(g_j(x))$ cauchyovská (v $\mathbb{R}$). Z úplnosti $\mathbb{R}$ tedy plyne existence $f(x) := \lim_{j\to\infty} g_j(x)$, $x \in M$. Dodefinujeme-li f nulou na $X \setminus M$, je měřitelná, a podle Fatouova lemmatu platí

$$\int |f|^p \, d\mu = \int \lim_{j\to\infty} |g_j|^p \, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int |g_j|^p \, d\mu < \infty$$

(konečnost plyne z toho, že každá cauchyovská posloupnost je omezená, tedy $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$). Je tedy $f \in L^p(\mu)$. Ukážeme, že $f_n \to f$ v $L^p(\mu)$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Z Cauchyovy vlastnosti, že existuje n_0 takové, že $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ kdykoliv $m, n \geq n_0$. Opět s využitím Fatouova lemmatu máme

$$\|f_n - f\|_p^p = \int |f_n - f|^p \, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int |f_n - g_j|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p$$

jakmile $n \geq n_0$. Tím je důkaz ukončen. □

Pozn.: Z důkazu předchozí věty plyne, že pokud $\|f_n - f\|_p \to 0$, $f_n, f \in L^p(\mu)$, pak existuje podposloupnost (f_{n_j}) taková, že $f_{n_j} \to f$ μ-s.v. $(j \to \infty)$.

12 Konvergence posloupností funkcí

Rekapitulace: Pro reálné funkce f_n, f definované na neprázdné množině X máme konvergenci *bodovou* ($f_n \to f$) a *stejnoměrnou* ($f_n \rightrightarrows f$). Je-li speciálně $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, máme navíc konegenci *skoro všude* ($f_n \to f$ s.v.) a L^p*-konvergenci* ($f_n \xrightarrow{L_p} f \iff \|f_n - f\| \to 0$), $1 \le p \le \infty$.

Definice 12.1 Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f_n, f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že *funkce f_n konvergují k funkci f podle míry μ* (píšeme $f_n \xrightarrow{\mu} f$), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{n \to \infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\} = 0.$$

Věta 12.1 *Pro $1 \le p \le \infty$ a $f_n, f \in L^p(\mu)$ platí:*

$$f_n \xrightarrow{L^p} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Tvrzení 12.2 (Čebyševova nerovnost) *Nechť $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mu)$ a $c > 0$. Pak*

$$\mu\{x \in X : |f(x)| \ge c\} \le \frac{\|f\|_p^p}{c^p}.$$

Důkaz: Platí

$$\mu\{|f| \ge c\} = \int_{\{|f| \ge c\}} 1 \, d\mu \le \int_{\{|f| \ge c\}} \left(\frac{|f|}{c}\right)^p d\mu \le \int \left(\frac{|f|}{c}\right)^p d\mu = \frac{\|f\|_p^p}{c^p}.$$

□

Důkaz Věty 12.1: Je-li $p = \infty$ a $\varepsilon > 0$, pak existuje n_0 takové, že $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, a tedy $\mu\{|f_n - f| \ge \varepsilon\} = 0$, pro $n > n_0$.

Je-li $p < \infty$, plyne tvrzení přímo z Čebyševovy nerovnosti. □

Věta 12.3 (Jegorov) *Nechť $\mu(X) < \infty$, f_n, f jsou reálné měřitelné funkce na X, $f_n \to f$ μ-s.v., a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $E \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(E) < \varepsilon$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $X \setminus E$.*

Důkaz: Existuje množina N nulové míry taková, že $f_n(x) \to f(x)$, $x \in X \setminus N$. Položme

$$A_{m,k} := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{1}{k} \text{ pro každé } n \ge m\}, \quad m, k \in \mathbb{N}.$$

Pak, z definice konvergence, pro každé k platí $X \setminus A_{m,k} \searrow N$, $m \to \infty$, a tedy existuje $m(k)$ takové, že $\mu(X \setminus A_{m(k),k}) < \varepsilon 2^{-k}$ (používáme větu o spojitosti míry a konečnost μ). Položme $E := \bigcup_{k=1}^\infty (X \setminus A_{m(k),k})$. Zřejmě $\mu(E) < \varepsilon$. Nechť $x \in X \setminus E$. Pak $x \in A_{m(k),k}$ pro všechna k, a tedy $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ kdykoliv $n \ge m(k)$. Tím je dokázána stejnoměrná konvergence f_n k f na $X \setminus E$. □

Důsledek 12.4 *Jestliže $\mu(X) < \infty$ a f_n, f jsou reálné měřitelné funkce na X takové, že $f_n \to f$ μ-s.v., pak $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

Důkaz: Pro $\varepsilon, \delta > 0$ platí

$$\mu\{|f_n - f| \geq \delta\} = \mu(\{|f_n - f| \geq \delta\} \cap E) + \mu(\{|f_n - f| \geq \delta\} \setminus E),$$

kde E je množina z Jegorovovy věty. První sčítanec je pak menší než ε a druhý je roven nule pro dostatečně velká n. $\square$

Pozn.: Funkce $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ konvergují bodově k nule, ale nikoliv podle míry λ^1. Předpoklad konečnosti míry je tedy v Jegorovově větě nutný.

Tvrzení 12.5 *Jestliže $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na prostoru s konečnou mírou μ, pak existuje vybraná podposloupnost (f_{n_j}) taková, že $f_{n_j} \to f$ μ-s.v.*

Důkaz Ke každému $j \in \mathbb{N}$ existuje $n_j \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu\{|f_n - f| \geq 2^{-j}\} < 2^{-j}$ kdykoliv $n \geq n_j$. Položme

$$A_j := \{x \in X : |f_{n_j}(x) - f(x)| > 2^{-j}\}, \quad A := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j.$$

Platí

$$\mu(A) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{1-k},\ k \in \mathbb{N},$$

tedy $\mu(A) = 0$. Přitom $f_{n_j}(x) \to f(x)$, $j \to \infty$, kdykoliv $x \in X \setminus A$. $\square$

Pozn.: Platí-li $f_n \to f$ μ-s.v. a $|f_n| \leq g$, $n \in \mathbb{N}$, pro nějakou funkci $g \in L^1(\mu)$, pak podle Lebesgueovy věty (Věta 4.10) platí $f_n \xrightarrow{L^1} f$.

Pozn.: Pro každou funkci $f \in L^1(\mu)$ platí

$$\lim_{c \to \infty} \int_{\{|f| \geq c\}} |f| \, d\mu = 0.$$

Definice 12.2 Posloupnost (f_n) měřitelných funkcí na $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je *stejnoměrně integrovatelná* (*s.i.*), jestliže

$$\lim_{c \to \infty} \sup_n \int_{\{|f_n| \geq c\}} |f_n| \, d\mu = 0.$$

Tvrzení 12.6 *Je-li posloupnost (f_n) s.i. na prostoru s konečnou mírou μ, platí $f_n \in L^1(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, a*

$$\sup_n \|f_n\|_1 < \infty.$$

Důkaz: Pro c dostatečně velké platí

$$\int |f_n| \, d\mu = \int_{|f_n| \leq c} |f_n| \, d\mu + \int_{|f_n| > c} |f_n| \, d\mu \leq c\mu(X) + 1.$$

$\square$

Příklad: Položme

$$f_{i,j} := \chi_{[(j-1)2^{-i}, j2^{-i}]}, \quad j = 1, \dots, 2^i,\ i \in \mathbb{N}.$$

Seřaďme $f_{i,j}$ do jedné posloupnosti (f_n). Pak $f_n \overset{\lambda^1}{\to} 0$, ale $f_n \not\to 0$ s.v.

Příklad: Pozměňme funkce z minulého příkladu tak, že funkci $f_{i,j}$ vynásobíme hodnotou $2^{-i/2}$. Pak $f_n \overset{L^1}{\to} 0$, ale neexistuje $g \in L^1$ taková, aby $|f_n| \le g$ s.v. Posloupnost (f_n) je ovšem s.i.

Věta 12.7 *Nechť $\mu(X) < \infty$ a $f_n \overset{\mu}{\to} f$. Pak*

$$f_n \overset{L^1}{\to} f \iff (f_n) \text{ je s.i.}$$

Důkaz Nejprve dokážeme implikaci $\Longleftarrow$. Předpokládejme tedy, že $f_n \overset{\mu}{\to} f$ a (f_n) je s.i.

(a) Podle Tvrzení 12.6 víme, že $f_n \in L^1$, $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že i $f \in L^1$. Buď (f_{n_j}) vybraná podposloupnost taková, že $f_{n_j} \to f$ s.v. (viz Tvrzení 12.5). Pak podle Fatouova lemmatu a Tvrzení 12.6 platí

$$\int |f|\, d\mu = \int \lim_{j\to\infty} f_{n_j}\, d\mu \le \liminf_{j\to\infty} \int |f_{n_j}|\, d\mu < \infty.$$

(b) Předpokládejme nejprve, že $|f_n| \le c$, $n \in \mathbb{N}$, a $|f| \le c$ pro nějaké $c < \infty$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ pak s $\delta := \varepsilon/(2\mu(X))$ platí

$$\int |f_n - f| = \int_{|f_n - f| \le \delta} + \int_{|f_n - f| > \delta} \le \delta\mu(X) + 2c\,\mu\{|f_n - f| > \delta\} < \varepsilon$$

pro n dostatečně velké, tedy $f_n \to f$ v L^1.

(c) Buďte f_n, f bez omezení z případu (b) a buď dáno $\varepsilon > 0$. Platí

$$\begin{aligned} \int |f_n - f| \quad &\le \int\limits_{\substack{|f_n| \le c \\ |f| \le c}} |f_n - f| + \int\limits_{|f_n| > c} |f_n - f| + \int\limits_{|f| > c} |f_n - f| \\ &=: \ I_n^1(c) + I_n^2(c) + I_n^3(c). \end{aligned}$$

Odhadneme

$$I_n^2(c) \le \int\limits_{|f_n|>c} |f_n| + \int\limits_{\substack{|f_n|>c \\ |f| \le c}} |f| + \int\limits_{\substack{|f_n|>c \\ |f|>c}} |f| \le 2 \int\limits_{|f_n|>c} |f_n| + \int\limits_{|f|>c} |f|,$$

$$I_n^3(c) \le \int\limits_{\substack{|f_n|>c \\ |f|>c}} |f_n| + \int\limits_{\substack{|f_n| \le c \\ |f|>c}} |f_n| + \int\limits_{|f|>c} |f| \le \int\limits_{|f_n|>c} |f_n| + 2 \int\limits_{|f|>c} |f|,$$

sečtením pak dostaneme

$$I_n^2(c) + I_n^3(c) \leq 3 \left(\int\limits_{|f_n|>c} |f_n| + \int\limits_{|f|>c} |f| \right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro dostatečně velké c a všechna n podle předpokladu stejnoměrné integrovatelnosti. Pro zvolené c je pak $I_n^1(c) < \frac{\varepsilon}{2}$ podle části (b). □

Důkaz implikace $\Longrightarrow$: Nechť $\mu(X) < \infty$ a $f_n \to f$ v L^1. Ukážeme, že (f_n) je s.i. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pro každé $c > 0$ platí

$$\begin{aligned} \int\limits_{|f_n|>c} |f_n| &\leq \int\limits_{|f_n|>c} |f_n - f| + \int\limits_{\substack{|f_n|>c \\ |f|\leq c/2}} |f| + \int\limits_{\substack{|f_n|>c \\ |f|>c/2}} |f| \\ &\leq \int |f_n - f| + \tfrac{c}{2}\mu\{|f_n - f| > \tfrac{c}{2}\} + \int\limits_{|f|>c/2} |f|. \end{aligned}$$

Z předpokladu $f_n \stackrel{L_1}{\to} f$ a z Čebyševovy nerovnosti existuje n_0 takové, že

$$\int |f_n - f| + \tfrac{c}{2}\mu\{|f_n - f| > \tfrac{c}{2}\} < \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_0, \quad c > 0.$$

Protože $f \in L^1$, existuje $c_0 > 0$ takové, že $\int_{|f|>c/2} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $c > c_0$. Rovněž pro každou z funkcí $f_1, \ldots, f_{n_0}$ existuje $c_i > 0$ tak, že $\int_{|f_i|>c} |f_i| < \varepsilon$, $c > c_i$, $i = 1, \ldots, n_0$. Pro $c > \max\{c_0, c_1, \ldots, c_{n_0}\}$ pak platí $\int_{|f_n|>c} |f_n| < \varepsilon$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tím je dokázána stejnoměrná integrovatelnost posloupnosti (f_n). □

Věta 12.8 *Nechť $\mu(X) < \infty$ a $1 \leq p < q \leq \infty$. Pak $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ a pro $f_n, f \in L^q(\mu)$ platí:*

$$f_n \stackrel{L^q}{\to} f \implies f_n \stackrel{L^p}{\to} f.$$

Důkaz: Je-li $f \in L^q$, platí

$$\int |f|^p = \int_{|f|\leq 1} |f|^p + \int_{|f|>1} |f|^p \leq \mu(X) + \int |f|^q < \infty,$$

tedy $f \in L^p$. Nechť dále $f_n \stackrel{L^q}{\to} f$ a $\varepsilon > 0$. Pro $\delta > 0$ je

$$\int |f_n - f|^p = \int\limits_{|f_n - f|\leq\delta} |f_n - f|^p + \int\limits_{|f_n - f|>\delta} |f_n - f|^p \leq \delta^p\mu(X) + \delta^{p-q} \int |f_n - f|^q.$$

Zvolme $\delta > 0$ tak malé, aby $\delta^p\mu(X) < \frac{\varepsilon}{2}$. K tomuto δ pak existuje n_0 takové, že $\delta^{p-q} \int |f_n - f|^q < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $n \geq n_0$. Pak je $\int |f_n - f|^p < \varepsilon$ pro $n \geq n_0$, a tím je $f_n \stackrel{L^p}{\to} f$ dokázáno. □

Příklad: $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ leží v $L^1(0,1)$, ale nikoliv v $L^2(0,1)$. Funkce $f(x) = x^{-1}$ leží v $L^2(1,\infty)$, ale nikoliv v $L^1(1,\infty)$.

13 Radon-Nikodymova věta

Tvrzení 13.1 *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f \geq 0$ měřitelná funkce na X. Pak předpis*

$$\nu : A \mapsto \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

definuje míru na $(X, \mathcal{A})$ a pro každou měřitelnou funkci g na X platí

$$\int g \, d\nu = \int g \cdot f \, d\mu,$$

má-li jedna strana smysl.

Důkaz: Zřejmě $\nu(\emptyset) = 0$ a $\nu \geq 0$. Ukážeme σ-aditivitu. Jsou-li $A_n \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, je

$$\nu(\bigcup_n A_n) = \int (f \cdot \chi_{\bigcup_n A_n}) \, d\mu = \int \sum_n (f \cdot \chi_{A_n}) \, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f \, d\mu = \sum_n \nu(A_n).$$

Rovnost $\int g \, d\nu = \int g \cdot f \, d\mu$ platí z definice, pokud g je charakteristickou funkcí měřitelné množiny. Standardním způsobem platnost rovnosti rozšíříme postupně pro jednoduché měřitelné funkce, nezáporné měřitelné a nakonec pro měřitelné, pro něž integrál existuje. $\square$

Pozn.: Zřejmě platí: $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$, $A \in \mathcal{A}$.

Definice 13.1 Buďte μ, ν dvě míry na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že míra ν je *absolutně spojitá* vzhledem k míře μ (píšeme $\nu \ll \mu$), jestliže

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Tvrzení 13.2 *Buďte μ, ν dvě konečné míry na $(X, \mathcal{A})$. Pak $\nu \ll \mu$ právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall A \in \mathcal{A}) : \mu(A) < \delta \implies \nu(A) < \varepsilon.$$

Důkaz: Implikace $\Longleftarrow$ je snadno vidět. Ukážeme opačnou implikaci. Nechť tedy $\nu \ll \mu$ a předpokládejme pro spor, že neplatí uvedený výrok, tedy že

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists A \in \mathcal{A}) : \mu(A) < \delta, \, \nu(A) \geq \varepsilon.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy existuje množina $A_n \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) < 2^{-n}$, ale $\nu(A) \geq \varepsilon$. Položme $A := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n$. Pak

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) < 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

tedy $\mu(A) = 0$. Přitom ale, podle věty o spojitosti míry (míra ν je konečná) platí

$$\nu(A) = \lim_{k\to\infty} \nu\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right) \geq \liminf_{k\to\infty} \mu(A_{k+1}) \geq \varepsilon > 0,$$

což je spor. $\square$

Věta 13.3 (Radon-Nikodym) *Buďte μ, ν dvě σ-konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu \ll \mu$. Pak existuje nezáporná měřitelná funkce f na X taková, že*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Definice 13.2 Funkci f z předchozí věty nazýváme (Radon-Nikodymovou) *hustotou* míry ν vyhledem k μ a píšeme

$$f(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x), \quad x \in X.$$

Tvrzení 13.4 *Buďte μ, ν dvě konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu(A) \leq \mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$. Pak existuje měřitelná funkce f na X splňující $0 \leq f \leq 1$ μ-s.v. a*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Důkaz: Označme funkcionál

$$\mathcal{J}g := \int g^2\, d\mu - 2\int g\, d\nu, \quad g \in L^2(\mu).$$

(Funkcionál je dobře definován, protože $L^2(\mu) \subset L^1(\mu) \subset L^1(\nu)$.) Dále označme $c := \inf\{\mathcal{J}g : g \in L^2(\mu)\}$. Platí

$$\mathcal{J}g \geq \int g^2\, d\mu - 2\int |g|\, d\mu = \int (|g| - 1)^2\, d\mu - \mu(X) \geq -\mu(X),$$

tedy $c \geq -\mu(X) > -\infty$. Buď $(f_n) \subset L^2(\mu)$ posloupnost taková, že $\mathcal{J}f_n \to c$. Ukážeme, že (f_n) je cauchyovská v $L^2(\mu)$.

Pro libovolné $g, h \in L^2(\mu)$ platí

$$\begin{aligned} \mathcal{J}g + \mathcal{J}h &= \int (g^2 + h^2)\, d\mu - 2\int (g + h)\, d\nu, \\ -2\mathcal{J}(\tfrac{g+h}{2}) &= -\int \tfrac{(g+h)^2}{2}\, d\mu + 2\int (g + h)\, d\nu, \end{aligned}$$

sečtením pak dostaneme

$$\mathcal{J}g + \mathcal{J}h - 2\mathcal{J}(\tfrac{g+h}{2}) = \frac{1}{2}\int (g - h)^2\, d\mu = \frac{1}{2}\|g - h\|_2^2.$$

Z toho plyne, že

$$\begin{aligned}\|f_m - f_n\|_2^2 &= 2\left(\mathcal{J}f_m + \mathcal{J}f_n - 2\mathcal{J}(\tfrac{f_m+f_n}{2})\right)\\ &\leq 2\left(\mathcal{J}f_m + \mathcal{J}f_n - 2c\right) \to 0, \quad m,n\to\infty,\end{aligned}$$

tedy (f_n) je cauchyovská v $L^2(\mu)$.

Dále platí $\int f_n^2\, d\mu \to \int f^2\, d\mu$ (protože norma je vždy spojitá), a

$$\left|\int f_n\, d\nu - \int f\, d\nu\right| \leq \int |f_n - f|\, d\nu \leq \int |f_n - f|\, d\mu \to 0,$$

protože $f_n \to f$ i v $L^1(\mu)$. Platí tedy $\mathcal{J}f_n \to f$, takže $\mathcal{J}f = c$.

Buďte nyní $A \in \mathcal{A}$ a $t \in \mathbb{R}$ libovolné. Protože $\mathcal{J}f \leq \mathcal{J}(f + t\chi_A)$, platí

$$\begin{aligned}0 &\leq \mathcal{J}(f+t\chi_A) - \mathcal{J}f = \int ((f+t\chi_A)^2 - f^2)\, d\mu - 2\int t\chi_A\, d\nu\\ &= \int f\cdot 2t\chi_A\, d\mu + t^2\mu(A) - 2t\nu(A)\\ &= 2t\left(\int_A f\, d\mu - \nu(A)\right) + t^2\mu(A).\end{aligned}$$

V posledním řádku je kvadratický polynom v t, který nabývá minima v $t = 0$, tedy jeho lineární člen musí být roven nule, neboli

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu.$$

f je tedy hustotou $\frac{d\nu}{d\mu}$. Zbývá ukázat, že $0 \leq f \leq 1$ μ-s.v. Platí

$$\begin{aligned}0 \leq \int (f-1)^+\, d\mu &= \int_{\{f>1\}} (f-1)\, d\mu = \int_{\{f>1\}} f\, d\mu - \int_{\{f>1\}} 1\, d\mu\\ &= \nu(\{f>1\}) - \mu(\{f>1\}) \leq 0,\end{aligned}$$

tedy $(f-1)^+ = 0$ μ-s.v., neboli $f \leq 1$ μ-s.v. Podobně platí

$$0 \leq \int f^-\, d\mu = -\int_{\{f<0\}} f\, d\mu = -\nu(\{f<0\}) \leq 0,$$

tedy $f^- = 0$ μ-s.v., což znamená, že $f \geq 0$ μ-s.v. □

Důkaz Radon-Nikodymovy věty: Nechť nejprve μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$, $\nu \ll \mu$. Použijeme Tvrzení 13.4 pro míry $\nu \leq \mu + \nu$. Existuje tedy měřitelná funkce h, $0 \leq h \leq 1$, taková, že

$$\nu(A) = \int_A h\, d(\mu+\nu) = \int_A h\, d\mu + \int_A h\, d\nu, \quad A \in \mathcal{A},$$

a tedy
$$\int_A (1-h)\,d\nu = \int_A h\,d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$
Standardním postupem snadno odvodíme, že pro každou nezápornou měřitelnou funkci g platí
$$\int g(1-h)\,d\nu = \int gh\,d\mu.$$
Specielně dostaneme
$$\nu\{h=1\} = \int_{\{h=1\}} h\,d(\mu+\nu) = \mu\{h=1\} + \nu\{h=1\},$$
tedy $\mu\{h=1\}=0$, a protože $\nu \ll \mu$, také $\nu\{h=1\}=0$. Platí tedy $h<1$ $(\mu+\nu)$-s.v.

Volbou $g := \frac{1}{1-h}\chi_A$ ve výše uvedené rovnosti dostaneme
$$\nu(A) = \int \frac{h}{1-h}\,d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$
tedy $f = \frac{h}{1-h}$ je hledaná hustota $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Jsou-li μ, ν σ-konečné, existuje rozklad $X = \bigcup_i E_i$ na měřitelné množiny s $\mu(E_i) < \infty$, $\nu(E_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. Pro konečné restrikce $\nu|E_i \ll \mu|E_i$ najdeme hustoty f_i na E_i, a výslednou hustotu sestrojíme jako
$$f(x) := f_i(x), \quad x \in E_i, \quad i = 1, 2, \dots.$$
□

Pozn.: Hustota $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ je určena jednoznačně modulo ekvivalence $\sim$. (Cvičení)

Definice 13.3 Řekneme, že dvě míry μ, ν na témže měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$ jsou *vzájemně singulární* (píšeme $\mu \perp \nu$), jestliže existuje množina $S \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(S) = 0$ a $\nu(X \setminus S) = 0$.

Příklady:

1. Je-li $x \neq y$, pak pro Diracovy míry platí $\delta_x \perp \delta_y$.
2. $\lambda^1 \perp \delta_x$ pro každý $x \in \mathbb{R}$.
3. $\lambda^1 \perp \mu$, kde μ je aritmetická míra na množině celých čísel.

Věta 13.5 (Rozklad míry na absolutně spojitou a singulární část) *Buďte μ, ν dvě σ-konečné míry na témže měřitelném prostoru. Pak existuje rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$ na míry ν_a, ν_s takový, že $\nu_a \ll \mu$ a $\nu_s \perp \mu$. Míry ν_a a ν_s jsou jednoznačně určeny.*

Pozn.: Míra ν_a se nazývá *absolutně spojitá část* a míra ν_s *singulární část* míry ν vzhledem k μ.

Důkaz: Buď $f_\mu := \frac{d\mu}{d(\mu+\nu)}$ Radon-Nikodýmova hustota. Označme $A := \{f_\mu > 0\}$ a $B := \{f_\mu = 0\}$; zřejmě $X = A \cup B$ je rozklad. Dále položme

$$\nu_a(\cdot) := \nu(\cdot \cap A), \qquad \nu_s(\cdot) := \nu(\cdot \cap B).$$

Zřejmě $\nu = \nu_a + \nu_s$. Dále platí $\nu_s(A) = 0$ a $\mu(B) = 0$, tedy $\nu_s \perp \mu$. A pokud $\mu(E) = 0$ pro nějakou měřitelnou množinu E, pak

$$0 = \mu(E) = \int_E f_\mu \, d(\mu + \nu),$$

tedy $f_\mu = 0$ ν-s.v. na E, což znamená, $\nu(E \cap A) = 0$ (podle definice A), tedy $\nu_a(E) = 0$. Je tedy $\nu_a \ll \mu$.

Ukážeme ještě jednoznačnost rozkladu. Nechť $\nu = \nu'_a + \nu'_s$ je jiný rozklad takový, že $\nu'_a \ll \mu$ a $\nu'_s \perp \mu$. Ukážeme, že

$$\nu'_s(A) = 0 = \nu'_a(B). \tag{5}$$

Z toho pak plyne pro každou $E \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \nu'_s(E) &= \nu'_s(E \cap B) = \nu'_s(E \cap B) + \nu'_a(E \cap B) = \nu(E \cap B) = \nu_s(E), \\ \nu'_a(E) &= \nu'_a(E \cap A) = \nu'_a(E \cap A) + \nu'_s(E \cap A) = \nu(E \cap A) = \nu_a(E). \end{aligned}$$

Stačí tedy ověřit (5). Protože $\nu'_s \perp \mu$, existuje měřitelná množina S taková, že $\mu(S) = 0$ a $\nu'_s(X \setminus S) = 0$. Pak

$$0 = \mu(S \cap A) = \int_{S \cap A} f_\mu \, d(\mu + \nu).$$

Protože $f_\mu > 0$ na A, musí být $(\mu + \nu)(S \cap A) = 0$, tedy i $\nu(S \cap A) = 0$ a $\nu'_s(S \cap A) = 0$, tudíž $\nu'_s(A) = \nu'_s(A \cap S) + \nu'_s(A \setminus S) = 0$. Dále (z definice B) platí $\mu(B) = 0$ a $\nu'_a \ll \mu$, tedy i $\nu'_a(B) = 0$. Tím je (5) ověřeno a důkaz ukončen. $\square$

14 Znaménkové míry

Definice 14.1 Řekneme, že funkce $\sigma : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$ je *znaménková míra* na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$, jestliže

(i) $\sigma(\emptyset) = 0$,

(ii) σ nabývá nejvýše jedné z hodnot $-\infty, \infty$,

(iii) (σ-aditivita) pro libovolnou posloupnost po dvou disjunktních množin $A_n \in \mathcal{A}$ platí

$$\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n).$$

Konečná znaménková míra se též nazývá *náboj*.

Pozn.: Je zřejmé, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n)$ v (iii) buď konverguje absolutně, nebo diverguje k $\pm\infty$.

Příklady:

1. Je-li μ míra a ν konečná míra na $(X, \mathcal{A})$, pak $\sigma = \mu - \nu$ je znaménková míra.
2. Je-li μ σ-konečná míra na $(X, \mathcal{A})$ a $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak $\sigma : A \mapsto \int_A f \, d\mu$ je znaménková míra.

Definice 14.2 Buď σ znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že množina $A \in \mathcal{A}$ je *kladná* pro σ, jestliže pro každou měřitelnou množinu $E \subset A$ platí $\sigma(A) \geq 0$. Množina $A \in \mathcal{A}$ je *záporná* pro σ, jestliže pro každou měřitelnou množinu $E \subset A$ platí $\sigma(A) \leq 0$.

Pozn.:

1. Nejvýše spočetné sjednocení kladných množin je kladná množina.
2. Měřitelná podmnožina kladné množiny je kladná množina.

Tvrzení 14.1 *Buď σ znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$ a $E \in \mathcal{A}$ množina taková, že $0 < \sigma(E) < \infty$. Pak existuje kladná množina $A \subset E$ taková, že $\sigma(A) > 0$.*

Důkaz: Kdyby sama E byla kladná, položíme $A := E$. Pokud ne, definujeme

$$t_1 := \inf\{\sigma(B) : B \subset E, \, B \in \mathcal{A}\} < 0$$

a vybereme $E_1 \subset E$ takovou, že $\sigma(E_1) < \max\{t_1/2, -1\}$. Platí $\sigma(E \setminus E_1) = \sigma(E) - \sigma(E_1) > \sigma(E) > 0$, a pokud je množina $E \setminus E_1$ již kladná, vybereme ji za A a jsme hotovi. Pokud ne, pokračujeme stejnou konstrukcí v množině $E \setminus E_1$, tedy položíme

$$t_2 := \inf\{\sigma(B) : B \subset E \setminus E_1, \, B \in \mathcal{A}\} < 0,$$

a zvolíme $E_2 \subset E \setminus E_1$ takovou, že $\sigma(E_2) < \max\{t_2/2, -1\}$. Tímto způsobem buď po konečném počtu kroků najdeme kladnou množinu $A \subset E$ kladné míry, nebo sestrojíme posloupnost disjunktních měřitelných množin $E_1, E_2, \dots \subset E$ a posloupnost záporných čísel $t_1, t_2, \dots$ takové, že $\sigma(E_i) < \min\{t_i/2, -1\} < 0$, $i \in \mathbb{N}$.

Položme $A := E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Ze spočetné aditivity dostaneme

$$\sigma(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(E_i) = \sigma(E) > 0,$$

tedy $\sigma(A) > \sigma(E) > 0$ a řada $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(E_i)$ konverguje, tedy nutně $\sigma(E_i) \to 0$. Pak ale i $t_i \to 0$. Ukážeme, že A je kladná. Pro libovolnou $B \subset A$ měřitelnou platí $B \cap E_i = \emptyset$, $i = 1, 2, \dots$, tedy $\sigma(B) \geq t_i$, $i = 1, 2, \dots$, a protože $t_i \to 0$, je $\sigma(B) \geq 0$. $\square$

Věta 14.2 (Hahn-Banachův rozklad) *Buď σ znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$. Pak existuje rozklad $X = P \cup N$ takový, že P je kladná a N záporná množina pro σ.*

Důkaz: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\sigma(E) < \infty$ pro každou $E \in \mathcal{A}$. (Kdyby ne, pracovali bychom s mírou $-\sigma$.) Položme

$$\lambda := \sup\{\sigma(E) : E \in \mathcal{A},\ E \text{ kladná pro } \sigma\}.$$

Zřejmě $\lambda \geq 0$ ($\emptyset$ je kladná). Buďte $A_i \in \mathcal{A}$ kladné takové, že $\sigma(A_i) \to \lambda$ (existence plyne z definice suprema). Pak množina $P := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ je kladná a ze vztahu

$$\sigma(P) = \sigma(A_i) + \sigma(P \setminus A_i) \geq \sigma(A_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

plyne $\sigma(P) = \lambda$. Ukážeme dále, že množina $N := X \setminus P$ je záporná. Nechť $B \subset N$ je měřitelná. Kdyby $\sigma(B) > 0$, pak by podle Tvrzení 14.1 existovala měřitelná kladná množina $B' \subset B$, pro niž $\sigma(B') > 0$. Pak by ale $P \cup B'$ byla rovněž kladná množina s mírou

$$\sigma(P \cup B') = \sigma(P) + \sigma(B') > \sigma(B) = \lambda,$$

což by byl spor s definicí λ. □

Definice 14.3 (Jordanův rozklad) Buď σ znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$. Pak (nezáporné) míry $\sigma_+(\cdot) := \sigma(\cdot \cap P)$ a $\sigma_-(\cdot) := -\sigma(\cdot \cap N)$ nazýváme *kladnou* a *zápornou částí* σ a platí

$$\sigma = \sigma_+ - \sigma_-.$$

Míru $|\sigma| := \sigma_+ + \sigma_-$ nazýváme *totální variací* znaménkové míry σ.

Pozn.: Alespoň jedna z měr σ_+, σ_- je konečná.

Tvrzení 14.3 *Je-li $\sigma = \sigma'_+ - \sigma'_-$ jiný rozklad znaménkové míry σ na rozdíl dvou (nezáporných) měr, pak $\sigma'_+ \geq \sigma_+$ a $\sigma'_- \geq \sigma_-$.*

Důkaz: Pro libovolnou $E \in \mathcal{A}$ platí

$$\sigma_+(E) = \sigma(E \cap P) = \sigma'_+(E \cap P) - \sigma'_-(E \cap P) \leq \sigma'_+(E \cap P) \leq \sigma'_+(E).$$

Podobně se ukáže, že $\sigma'_-(E) \geq \sigma(E)$. □

Příklad: Nechť $f \in L^1(0,1)$. Pak

$$\sigma : E \mapsto \int_E f(x)\,dx, \quad E \subset [0,1] \text{ borelovská},$$

je znaménková míra a platí

$$\sigma_+(E) = \int_E f^+(x)\,dx,\ \sigma_-(E) = \int_E f^-(x)\,dx,\ |\sigma|(E) = \int_E |f|(x)\,dx.$$

15 Věta o rozšíření míry

Definice 15.1 Nechť $X \neq \emptyset$ a $\mathcal{A}$ je algebra podmnožin X. Řekneme, že funkce $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ je *pramíra*, jestliže

(i) $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$,

(ii) pro libovolné množiny $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní a takové, že i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, platí

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i).$$

Pozn.: $\tilde{\mu}$ je zřejmě monotónní.

Příklad: Množinová funkce

$$\tilde{\mu}(A) := \begin{cases} 0, & A \subset \mathbb{N} \text{ konečná}, \\ \infty, & A \subset \mathbb{N} \text{ nekonečná} \end{cases}$$

je konečně aditivní množinová funkce na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, která není σ-aditivní.

Věta 15.1 (Hahn-Kolmogorovova věta o rozšíření míry) *Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X. Pak existuje míra μ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\tilde{\mu} = \mu$ na $\mathcal{A}$. Je-li $\tilde{\mu}$ σ-konečná, je μ jednoznačně určena.*

Důkaz: Pro $E \subset X$ položme

$$\mu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i) : A_i \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

(a) μ^* *je vnější míra*: Zřejmě $\mu^*(\emptyset) = 0$ a μ^* je monotónní. Ukážeme spočetnou subaditivitu (důkaz je stejný jako v případě vnější míry λ^{n*}). Nechť $E_i \in \mathcal{A}$, $\mu^*(E_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. K danému $\varepsilon > 0$ existují $A_{ij} \in \mathcal{A}$ takové, že $E_i \subset \bigcup_j E_{ij}$ a $\sum_j \tilde{\mu}(A_{ij}) < \mu^*(E_i) + \varepsilon 2^{-i}$, $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcup_i E_i \subset \bigcup_i \bigcup_j A_{ij}$ a $\sum_i \sum_j \tilde{\mu}(A_{ij}) < \sum_i \mu^*(E_i) + \varepsilon$, z čehož již plyna spočetná subaditivita, neboť ε může být libovolně malé.

(b) *Pro každou $A \in \mathcal{A}$ platí $\mu^*(A) = \tilde{\mu}(A)$*: Nerovnost $\mu^*(A) \leq \tilde{\mu}(A)$ je zřejmá. Pro důkaz opačné nerovnosti předpokládejme, že $A \subset \bigcup_i A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$. Indukcí definujme $B_1 := A_1 \cap A$, $B_2 := (A_2 \cap A) \setminus B_1$, a

$$B_i := (A_i \cap A) \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{i-1}), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě B_i jsou po dvou disjunktní a platí $A = \bigcup_i B_i$, z vlastností pramíry tedy dostaneme

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_i \tilde{\mu}(B_i) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i).$$

To (podle definice μ^*) znamená, že $\mu^*(A) \geq \tilde{\mu}(A)$.

(c) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$: Nechť $A \in \mathcal{A}$, $T \subset X$, $\mu^*(T) < \infty$. Stačí ukázat, že $\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$. K danému $\varepsilon > 0$ existuje pokrytí $T \subset \bigcup_i A_i$ množinami $A_i \in \mathcal{A}$ takové, že $\sum_i \tilde{\mu}(A_i) < \mu^*(T) + \varepsilon$. Protože $T \cap A \subset \bigcup_i (A_i \cap A)$, $T \setminus A \subset \bigcup_i (A_i \setminus A)$ a množiny $A_i \cap A$ i $A_i \setminus A$ patří do $\mathcal{A}$, platí

$$\mu^*(T \cap A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \cap A), \quad \mu^*(T \setminus A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \setminus A),$$

a sečtením dostaneme

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \cap A) + \sum_i \tilde{\mu}(A_i \setminus A) = \sum_i \tilde{\mu}(A_i) < \mu^*(T) + \varepsilon,$$

z čehož již plyne dokazovaná nerovnost.

Podle Caratheodoryho věty je $\mu := \mu^* | \mathcal{A}_{\mu^*}$ míra, která navíc podle (b) rozšiřuje pramíru $\tilde{\mu}$, a podle (c) je definovaná na $\sigma\mathcal{A}$.

Jednoznačnost snadno plyne z věty o jednoznačnosti (Věta 7.3). Algebra $\mathcal{A}$ je zřejmě uzavřená na konečné průniky a je-li $\tilde{\mu}$ σ-konečná, existují množiny $A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $\tilde{\mu}(A_n) < \infty$ a $A_n \nearrow X$, $n \to \infty$. □

Tvrzení 15.2 *Buď $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ konečná, konečně aditivní funkce na algebře $\mathcal{A}$ splňující $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Pak $\tilde{\mu}$ je σ-aditivní právě tehdy, když*

$$A_i \in \mathcal{A}, \, A_i \searrow \emptyset \implies \tilde{\mu}(A_i) \to 0. \tag{6}$$

Pozn: Vlastnosti (6) se říká spojitost $\tilde{\mu}$ v prázdné množině.

Důkaz: $\Longrightarrow$: Nechť $\tilde{\mu}$ je σ-aditivní a $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \searrow \emptyset$. Pak $A_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i+1})$ a množiny $A_i \setminus A_{i+1}$ jsou po dvou disjunktní, tedy

$$\tilde{\mu}(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i \setminus A_{i+1}) < \infty.$$

Rovněž platí $A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} (A_i \setminus A_{i+1})$, tedy

$$\tilde{\mu}(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i \setminus A_{i+1}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

$\Longleftarrow$: Nechť nyní platí (6), $B_i \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní a $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$. Pro množiny $A_n := A \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_n)$ platí $A_n \searrow \emptyset$, tedy $\tilde{\mu}(A_n) \to 0$. Z konečné aditivity $\tilde{\mu}$ máme

$$\tilde{\mu}(A) - \tilde{\mu}(A_n) = \tilde{\mu}(A \setminus A_n) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}(B_i),$$

a limitním přechodem $n \to \infty$ dostaneme $\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_i)$, tedy $\tilde{\mu}$ je σ-aditivní na $\mathcal{A}$. □

Příklady:

1. Označme symbolem $\mathcal{A}_0$ systém podmnožin $\mathbb{R}$ obsahující prázdnou množinu a všechna konečná sjednocení intervalů typu $(a,b]$ a (a,∞), $a \in [-\infty,\infty)$, $b \in \mathbb{R}$. Lze snadno nahlédnout, že $\mathcal{A}_0$ je algebra, a definujeme-li množinovou funkci $\tilde{\mu}$ na $\mathcal{A}_0$ jako součet délek příslušných (disjunktních) intervalů, je jejím rozšířením na $\sigma\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Lebesgueova míra λ^1. Abychom ovšem mohli použít Hahn-Kolmogorovovu větu, museli bychom ukázat σ-aditivitu na $\mathcal{A}_0$.

2. Na algebře $\mathcal{A}_0$ z předchozího příkladu uvažujme množinovou funkci
$$\tilde{\mu}(A) := \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \infty, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$
$\tilde{\mu}$ je zřejmě pramíra, nemá ale jednoznačné rozšíření na $\sigma\mathcal{A}_0$. Jedním možným rozšířením je míra definovaná stejným předpisem jako $\tilde{\mu}$ (tedy 0 pro prázdnou množinu a ∞ pro všechny neprázdné množiny), jiným rozšířením je aritmetická míra, nebo její libovolný kladný násobek.

Příklad. Položme $X := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (posloupnosti $0-1$) a pro $n \in \mathbb{N}$ označme $\Pi_n : X \to \{0,1\}^n$ projekci do prvních n souřadnic. Dále označme
$$\mathcal{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n^{-1}(\mathcal{P}\{0,1\}^n).$$
Systém $\mathcal{A}$ tvoří algebru a definujeme na ní množinovou funkci předpisem: Je-li $A \in \mathcal{A}$, pak $A = \Pi_n^{-1}(B)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $B \subset \{0,1\}^n$; klademe
$$\tilde{\mu}(A) := \frac{\operatorname{card} B}{2^n}.$$
$\tilde{\mu}$ je korektně definovaná konečně aditivní množinová funkce.

Na množině X zavedeme metriku
$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}, \quad x,y \in X.$$
Potřebujeme tyto znalosti z matematické analýzy:

1. Konvergence posloupnosti v (X,d) je ekvivalentní konvergenci posloupností všech souřadnic.
2. (X,d) je kompaktní metrický prostor.
3. Každá množina $A \in \mathcal{A}$ je otevřená i uzavřená v (X,d).

Jsou-li $A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $A_n \searrow \emptyset$, pak z kompaktnosti A_n plyne, že existuje n_0 takové, že $A_n = \emptyset$ pro $n > n_0$. Pak ale jistě $\tilde{\mu}(A_n) \to 0$, je tedy splněna podmínka (6) a tudíž $\tilde{\mu}$ je pramíra. Podle Hahn-Kolmogorovovy věty tedy existuje její jednoznačné rozšíření na míru μ na $\mathcal{B} := \sigma\mathcal{A}$. Míra μ je pravděpodobnostní míra a má význam rozložení pravděpodobnosti pro posloupnost nezávislých opakování pokusu hodu mincí.

16 Distribuční funkce

Definice 16.1 Buď μ konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$. Pak

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

je *distribuční funkce* míry μ.

Tvrzení 16.1 (1) *F_μ je neklesající,*

(2) *$F(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0$, $F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F_\mu(x) < \infty$,*

(3) *F_μ je zprava spojitá.*

Důkaz: Tvrzení snadno plyne z monotonie a spojitosti míry. □

Věta 16.2 *Nechť funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má vlastnosti (1), (2) a (3). Pak existuje právě jedna konečná borelovská míra μ na $\mathbb{R}$ taková, že $F_\mu = F$.*

Důkaz: Buď $\mathcal{A}_0$ algebra generovaná intervaly $(a, b]$, (a, ∞), $a \in [-\infty, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$. Každou množinu $A \in \mathcal{A}_0$ můžeme vyjádřit jako disjunktní konečné sjednocení $A = \bigcup_{i=1}^k (a_i, b_i]$ a definujeme množinovou funkci na $\mathcal{A}_0$ předpisem

$$\tilde{\mu}(A) := \sum_{i=1}^k (F(b_i) - F(a_i)).$$

Snadno lze ověřit, že $\tilde{\mu}$ je korektně definovaná a konečně aditivní na $\mathcal{A}_0$. Ukážeme, že $\tilde{\mu}$ je pramíra. K tomu stačí ukázat spojitost v prázdné množině. Nechť tedy $A_n \in \mathcal{A}_0$, $A_n \searrow \emptyset$, a buď $\varepsilon > 0$ dáno. Protože F má konečné limity v $-\infty$ a ∞, existuje $M > 0$ takové, že

$$F(-M) + (F(\infty) - F(M)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

a tedy omezené množiny $B_n := A_n \cap (-M, M] \in \mathcal{A}_0$ splňují

$$\tilde{\mu}(B_n) \geq \tilde{\mu}(A_n) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vyjádřeme B_n ve tvaru disjunktního sjednocení $B_n := \bigcup_{i=1}^{k_n} (a_i^n, b_i^n]$ (zde $a_i^n, b_i^n \in \mathbb{R}$). Protože F je zprava spojitá, existuje $\delta_n > 0$ takové, že pro množinu $C_n := \bigcup_{i=1}^{k_n} (a_i^n + \delta_n, b_i^n]$ platí

$$\tilde{\mu}(B_n \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Množiny $K_n := \overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_n}$ jsou kompaktní a splňují

$$K_n \searrow \bigcap_{i=1}^\infty \overline{C_i} \subset \bigcap_{i=1}^\infty A_i = \emptyset,$$

tedy existuje n, pro něž je $K_n = \emptyset$, a tedy i $C_1 \cap \cdots \cap C_n = \emptyset$. Pak platí

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(B_n) &= \tilde{\mu}\left(B_n \setminus \bigcap_{i=1}^{n} C_i\right) \\
&= \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (B_n \setminus C_i)\right) \\
&\leq \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (B_i \setminus C_i)\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}(B_i \setminus C_i) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Celkem tedy máme $\tilde{\mu}(A_n) < \varepsilon$, a protože ε bylo zvoleno libovolně malé, dokázali jsme, že $\tilde{\mu}(A_n) \searrow 0$. $\tilde{\mu}$ je tedy konečná pramíra na $\mathcal{A}_0$ a podle Hahn-Kolmogorovovy věty existuje právě jedno rozšíření na míru μ na $\sigma\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

Příklady:

1. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1 & x \geq a, \end{cases}$ je distribuční funkce Diracovy míry δ_a.

2. Jsou-li $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_k < \infty$ a $t_1, \ldots, t_k > 0$, pak

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a_0, \\ t_1 + \cdots + t_i, & x \in [a_i, a_{i+1}),\ i = 1, \ldots, k-1, \\ t_1 + \cdots + t_k, & x \geq a_k, \end{cases}$$

   je distribuční funkce míry $\mu = t_1\delta_{a_1} + \cdots + t_k\delta_{a_k}$.

3. Je-li $f \in L^1(\lambda)$, $f \geq 0$, pak

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

   je distribuční funkce míry $\mu(B) = \int_B f(t)\,dt$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definice 16.2 Konečná borelovská míry μ na $\mathbb{R}$ je

- *diskrétní*, jestliže existuje spočetná množina $S \subset \mathbb{R}$ taková, že $\mu(\mathbb{R} \setminus S) = 0$;
- *neatomická*, jestliže $\mu(\{x\}) = 0$ pro každý $x \in \mathbb{R}$.

Cvičení:

1. Je-li μ zároveň diskrétní a neatomická, je nulová.

2. Každá diskrétní míra je tvaru $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} t_i\delta_{a_i}$ pro nějaké $t_i \geq 0$ a $a_i \in \mathbb{R}$, $\sum_i t_i < \infty$.

3. μ je neatomická $\iff$ F je spojitá.

Příklad Buď $C \subset [0,1]$ Cantorovo diskontinuum. *Cantorovu funkci* F_C definujeme následovně. Klademe $F_C(x) = 0$ pro $x \leq 0$ a $F_C(x) = 1$ pro $x \geq 1$. Dále $x \in (0,1)$ vyjádříme v trojkové rozvoji

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j} \quad (x_j \in \{0,1,2\}),$$

označíme $n(x) := \inf\{j \in \mathbb{N} : x_j = 1\}$ a klademe

$$F_C(x) := \sum_{j=1}^{n(x)} \frac{\min\{x_j, 1\}}{2^j}, \quad x \in (0,1).$$

Funkce F_C je spojitá, neklesající a je distribuční funkcí *Cantorovy míry* μ_C, která je neatomická, ale přitom je singulární vzhledem k Lebesgueově míře.

Pozn.: Každou konečnou borelovskou míru μ na $\mathbb{R}$ lze rozložit na součet

$$\mu = \mu_a + \mu_c + \mu_d,$$

kde $\mu_a \ll \lambda$, μ_d je diskrétní a μ_c neatomická s vlastností $\mu_c \perp \lambda$.

Tvrzení 16.3 *Nechť distribuční funkce F konečné míry μ má všude vlastní derivaci $F' =: f$. Pak $\mu \ll \lambda$ a $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$.*

Důkaz: Označme $\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}^1 : \mu(B) = \int_B f(x)\,dx\}$. Z vlastnosti

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

plyne, že $\mathcal{D}$ obsahuje všechny intervaly typu $(a,b]$. Protože systém těchto intervalů je uzavřen na konečné průniky a generuje borelovskou σ-algebru, a protože $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém, je $\mathcal{D} = \mathcal{B}^1$, a tedy f je Radon-Nikodymova hustota μ vzhledem k λ^1. $\square$

Pozn.:

1. Podmínka existence derivace distribuční funkce všude není nutná pro absolutní spojitost (vzhledem k λ). Např.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

   je distribuční funkcí absoluitně spojité míry $\mu(\cdot) = \lambda(\cdot \cap (0,1))$.

2. Každá monotónní funkce, a tedy i každá distribuční funkce, má derivace v λ-skoro všech bodech.

3. Nutnou a postačující podmínkou pro absolutní spojitost $\mu \ll \lambda$ je *absolutní spojitost* distribuční funkce F: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x_1 < y_1 < \cdots < x_n < y_n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i) < \delta \implies \sum_{i=1}^{n}|F(y_i) - F(x_i)| < \varepsilon.$$

Definice 16.3 (Lebesgue-Stieltjesův integrál) Je-li F distribuční funkce konečné míry μ a $f \in L^1(\mu)$, píšeme

$$\int f(x)\,dF(x) := \int f(x)\,d\mu(x).$$

Je-li navíc $a < b$, značíme

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) := \int_{(a,b]} f(x)\,d\mu(x).$$

Věta 16.4 (Per partes pro Lebesgue-Stieltjesův integrál) *Jsou-li F, G dvě distribuční funkce a $a < b$, platí*

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b F(x_-)\,dG(x) + \int_a^b G(x)\,dF(x),$$

kde $F(x_-) := \lim_{y \to x_-} F(y)$.

Důkaz: S využitím Fubiniho věty dostaneme

$$\begin{aligned}
(F(b) - F(a))(G(b) - G(a)) &= \int_{(a,b]^2} d(\mu_F \otimes \mu_G) \\
&= \int_a^b \int_a^b \chi_{\{x<y\}}\,dF(x)\,dG(y) + \int_a^b \int_a^b \chi_{\{x \geq y\}}\,dG(y)\,dF(x) \\
&= \int_a^b \int_{(a,y)} dF(x)\,dG(y) + \int_a^b \int_a^x dG(y)\,dF(x) \\
&= \int_a^b (F(y_-) - F(a))\,dG(y) + \int_a^b (G(x) - G(a))\,dF(x) \\
&= \int_a^b F(x_-)\,dG(x) + \int_a^b G(x)\,dF(x) - F(a)(G(b) - G(a)) - G(a)(F(b) - F(a)),
\end{aligned}$$

a odečtením dostaneme dokazovanou rovnost. □

Příklady:

1. Mají-li F i G derivaci na $\mathbb{R}$, dostaneme z věty 16.4 a tvrzení 16.3

$$[FG]_a^b = \int_a^b F(x)G'(x)\,dx + \int_a^b F'(x)G(x)\,dx,$$

což je klasický vzorec per partes.

2. Pro Cantorovu funkci F_C platí symetrie $F_C(1-x) = 1 - F_C(x)$, $x \in (0,1)$, z čehož snadno dostaneme $\int_0^1 F_C(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Použitím vzorce per partes pak dostaneme
$$1 = \int_0^1 x\,dF_C(x) + \int_0^1 F_C(x)\,dx,$$
tedy $\int_0^1 x\,dF_C(x) = \frac{1}{2}$.

Pozn.: Lebesgue-Stieltjesův integrál lze definovat i podle rozdílu dvou distribučních funkcí, což jsou zprava spojité *funkce s konečnou variací.*

17 Důkaz věty o substituci

Věta 17.1 (Vitali) *V každé otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$ existuje spočetný disjunktní systém otevřených koulí $\{B_i\}$ takový, že $\lambda^n(U \setminus \bigcup_i B_i) = 0$.*

Důkaz: Větu stačí dokázat pro omezenou otevřenou množinu U. Označme $\mathcal{F} := \{B \subset U : B \text{ ot. koule}\}$, $R := \sup\{\operatorname{rad} B : B \in \mathcal{F}\}$ ($\operatorname{rad} B$ značí poloměr koule B) a
$$\mathcal{F}_n := \{B \in \mathcal{F} : \operatorname{rad} B \in (2^{-n-1}R, 2^{-n}R]\}, \quad , n = 0, 1, 2, \dots$$
Indukcí dále sestrojímeme disjunktní systémy koulí: $\mathcal{B}_0$ je libovolný maximální disjunktní podsystém systému $\mathcal{F}_0$, a máme-li definovány $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_{n-1}$, vezmeme za $\mathcal{B}_n$ libovolný maximální disjunktní podsystém systému $\{B \in \mathcal{F}_n : B \cap B' = \emptyset, B' \in \mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_{n-1}\}$. Pak $\mathcal{F}' := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n$ je disjunktní systém koulí obsažených v U. Pro každou kouli $B \in \mathcal{F}$, je-li $B \in \mathcal{F}_n$, pak existuje $B' \in \mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$ taková, že $B \cap B' \neq \emptyset$, přitom
$$\operatorname{rad} B' > 2^{-n-1}R \geq \frac{1}{2} \operatorname{rad} B,$$
tedy $B \subset 5B'$ (zde $5B'$ značí kouli se stejným středem jako B', ale s pětinásobným poloměrem). Je tedy $U \subset \bigcup_{B' \in \mathcal{F}'} 5B'$, z čehož plyne, že $\lambda^n(\bigcup \mathcal{F}') \geq 5^{-n}\lambda^n(U)$, a tedy
$$\lambda^n(U \setminus \bigcup \mathcal{F}') \leq 1 - 5^{-n}.$$
Stejný postup zopakujeme pro množinu $U \setminus \operatorname{cl} \bigcup \mathcal{F}'$ a získáme nový disjunktní systém koulí, a doplněk v U sjednocení koulí z obou systémů už bude mít míru maximálně $(1 - 5^{-n})^2$. Iterováním tohoto postupu nakonec pokryjeme disjunktními koulemi skoro všechny body z U. □

Definice 17.1 Zobrazení $f : X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y je *L-lipschitzovské*, jestliže pro všechna $x, y \in X$ platí
$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y).$$

Věta 17.2 *Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ lebesgueovsky měřitelná a $f : A \to \mathbb{R}^n$ L-lipschitzovské, pak*
$$\lambda^{n*}(f(A)) \leq L^n \lambda^n(A).$$

Pozn.: Lipschizovský obraz měřitelné množiny je měřitelný, což ale nedokazujeme, proto tvrzení pracuje s vnější mírou. (Pouze spojitý obraz měřitelné množiny ovšem nemusí být měřitelný.)

Důkaz: (1) Je-li $A \subset B$, kde $B = B(x, r)$ je koule, pak $f(A) \subset f(B) \subset B(f(x), Lr)$, a tedy $\lambda^n(f(A)) \leq L^n \lambda^n(B)$.

(2) Ukážeme, že pro nulovou množinu $N \subset \mathbb{R}^n$ je $\lambda^n(f(N)) = 0$. Protože N je nulová, ke každému $\varepsilon > 0$ existují otevřené kvádry I_i taková, že $N \subset \bigcup_i I_i$ a $\sum_i \lambda^n(I_i) < \varepsilon$. Lze přitom zařídit, aby pro všechna i

$$\frac{r(I_i)}{R(I_i)} \geq \eta > 0,$$

kde $r(I)$ $(R(I))$ je poloměr vepsané (opsané) koule kvádru I a $\eta > 0$ je konstanta závisející pouze na dimenzi n (lze toho dosáhnou půlením “příliš dlouhých” hran). Je-li B_i koule opsaná kvádru I_i, platí tedy $\lambda^n(B_i) \leq \eta^{-n} \lambda^n(I_i)$, a tedy

$$\begin{aligned} \lambda^{n*}(f(N)) &\leq \lambda^{n*}\left(\bigcup_i f(B_i)\right) \leq \sum_i \lambda^{n*}(f(B_i)) \\ &\leq L^n \sum_i \lambda^n(B_i) \leq \left(\frac{L}{\eta}\right)^n \sum_i \lambda^n(I_i) < \left(\frac{L}{\eta}\right)^n \varepsilon. \end{aligned}$$

Protože ε může být libovolně malé, platí $\lambda^{n*}(f(N)) = 0$.

(3) Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná a $\varepsilon > 0$, existuje otevřená množina $G \supset A$ taková, že $\lambda^n(G) \leq \lambda^n(A) + \varepsilon$ (vlastnost regularity Lebesgueovy míry). Podle Vitaliho věty existují disjunktní koule $B_i \subset G$ a nulová množina N tak, že $G = \bigcup_i B_i \cup N$, a tedy, s využitím (1) a (2) dostaneme

$$\begin{aligned} \lambda^{n*}(f(A)) &\leq \lambda^{n*}(f(G)) \leq \lambda^{n*}\left(\bigcup_i f(B_i) \cup f(N)\right) \\ &\leq \sum_i L^n \lambda^n(B_i) = L^n \lambda^n(G) \leq L^n \lambda^n(A) + L^n \varepsilon, \end{aligned}$$

a limitní přechod $\varepsilon \to 0$ dává žádaný odhad. $\square$

Definice 17.2 *Normu* regulárního lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definujeme jako

$$\|L\| := \sup\{\|Lu\| : \|u\| \leq 1\}.$$

Pozn.: Platí:

$$\delta(L)\,\|u\| \leq \|Lu\| \leq \|L\|\,\|u\|, \quad u \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

kde $\delta(L) := \inf\{\|Lu\| : \|u\| = 1\}$.

Tvrzení 17.3 *Jsou-li L, M dvě regulární lineární zobrazení a $\gamma > 0$ takové, že $\|Lu\| \leq \gamma \|Mu\|$, $u \in \mathbb{R}^n$, pak*

$$|\det L| \leq \gamma |\det M|.$$

Důkaz: Nejprve tvrzení dokážeme pro případ $M = \mathrm{Id}$. Je-li $\|Lu\| \le \gamma\|u\|$, $u \in \mathbb{R}^n$, a $B \subset \mathbb{R}^n$ koule se středem v počátku, pak $L(B) \subset \gamma B$, což implikuje

$$|\det L|\lambda^n(B) = \lambda^n(L(B)) \le \lambda^n(\gamma B) = \gamma^n \lambda^n(B),$$

a tedy $|\det L| \le \gamma^n$.

Pro obecná L, M pak z předpokladu $\|Lu\| \le \gamma\|Mu\|$, $u \in \mathbb{R}^n$, plyne $\|LM^{-1}v\| \le \gamma\|v\|$, $v \in \mathbb{R}^n$ (klademe $v = Mu$), a tedy $|\det(LM^{-1})| \le \gamma^n$, z čehož plyne $|\det L| \le \gamma^n|\det M|$. □

Věta 17.4 (Věta o substituci) *Buďte $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $g : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus (C^1) a $A \subset U$ lebesgueovsky měřitelná. Pak*

$$\int_A |Jg(x)|\,dx = \lambda^n(g(A)).$$

Pozn.: Toto je speciální případ Věty 9.6 s funkcí $f = \chi_{g(A)}$. Obecný případ se dokáže standardním postupem (postupně pro jednoduché měřitelné funkce, nezáporné měřitelné a nakonec integrovatelné funkce).

Důkaz: Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Ke každému $x \in U$ existuje $r_x > 0$ takové, že pro všechna $y \in B(x, r_x)$ platí

$$\|Dg(y) - Dg(x)\| < \varepsilon\|Dg(x)(y - x)\| \tag{8}$$

a

$$\|g(y) - g(x) - Dg(x)(y - x)\| < \varepsilon\|Dg(x)(y - x)\| \tag{9}$$

(využíváme definice a spojitosti diferenciálu a (7)). Existuje spočetná množina $S = \{x_1, x_2, \dots\} \subset U$ taková, že $U = \bigcup_i B(x_i, r_{x_i})$ (stačí si uvědomit, že existují kompaktní množiny $K_j \nearrow U$ a každou K_j lze pokrýt konečně mnoha koulemi). Označme $B_i := B(x_i, r_{x_i})$ a $L_i := Dg(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Z vlastnosti (9) plyne

$$(1 - \varepsilon)\|L_i u\| \le \|Dg(x)u\| \le (1 + \varepsilon)\|L_i u\|, \quad x \in B_i,\ u \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Je snadno vidět, že existuje měřitelný rozklad $A = \bigcup_{i,j} E_{ij}$ takový, že $E_{ij} \subset B_i$, $\operatorname{diam} E_{ij} < j^{-1}$ a $r_x > j^{-1}$, $x \in E_{ij}$, $i, j \in \mathbb{N}$. Pro libovolné dva body $x, y \in E_{ij}$ pak platí

$$\|g(y) - g(x)\| \le \|Dg(x)(y - x)\| + \varepsilon\|Dg(x)(y - x)\| \le (1 + \varepsilon)^2\|L_i(y - x)\|$$

a

$$\|g(y) - g(x)\| \ge \|Dg(x)(y - x)\| - \varepsilon\|Dg(x)(y - x)\| \ge (1 - \varepsilon)^2\|L_i(y - x)\|.$$

To znamená, že zobrazení $g \circ L_i^{-1} : L_i(E_{ij}) \to g(E_{ij})$ je $(1+\varepsilon)^2$-lipschitzovské, a jeho inverze $L_i \circ g^{-1}$ je $(1-\varepsilon)^{-2}$-lipschitzovská. S využitím prostoty g, Věty 17.2,

(10) a Tvrzení 17.3 pak dostaneme

$$\begin{aligned}
\lambda^n(g(A)) &= \lambda^n\left(g\left(\bigcup_{i,j} E_{ij}\right)\right) = \sum_{i,j} \lambda^n(g(E_{ij})) \\
&\leq \gamma^n \sum_{i,j} \lambda^n(L_i(E_{ij})) = \gamma^n \sum_{i,j} |\det L_i| \lambda^n(E_{ij}) \\
&= \gamma^n \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} |\det L_i|\, dx \leq \gamma^n \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} \gamma^n |Jg(x)|\, dx \\
&= \gamma^{2n} \int_A |Jg(x)|\, dx,
\end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned}
\lambda^n(g(A)) &\geq \gamma^{-n} \sum_{i,j} \lambda^n(L_i(E_{ij})) \geq \gamma^{-n} \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} \gamma^{-n} |Jg(x)|\, dx \\
&= \gamma^{-2n} \int_A |Jg(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0$ (tedy $\gamma \to 1$) dostaneme dokazovanou rovnost. $\square$