Domácí úkol č. 5 (G2, 2023)

Pro následující orientované plochy S s krajem popište kraj plochy ∂S a jeho indukovanou orientaci:

1. $$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \, x^2 + y^2 \leq 1\},$$
   orientace normálou směřující ven z koule $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.
2. $$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1, \, x \geq 0\},$$
   orientace normálou směřující ven z hyperboloidu $\{x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$.
3. $$S = \{(x, y, z, w) : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, \, w \leq 0\},$$
   orientace normálou směřující ven z koule $\{x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1\}$.

Nápověda k řešení: Nepřistupujte k úloze příliš formálně, raději více "geometricky" (s obrázkem). Třeba v prvním příkladu zjistíte hned, že kraj ∂S je tvořen dvěma kružnicemi: $\{(x, y, \pm\sqrt{3}) : x^2 + y^2 = 1\}$, tedy orientující tečný vektor bude buď $(-y, x, 0)$, nebo $(y, -x, 0)$. Vnější normála ke kouli je tvaru $N = \frac{1}{2}(x, y, \pm\sqrt{3})$ a "relativní" vnější normála je $\nu_S = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x, \sqrt{3}y, \pm 1)$ (pozor na znaménko ve třetí souřadnici, liší se pro první a druhou komponentu kraje!). Ze vztahu $\det(N, \nu_S, \tau_{\partial S}) > 0$ pak snadno zjistíte, který z obou tečných vektorů určuje správnou orientaci kraje (závisí na komponentě).

Podobně lze přistoupit k příkladu 2, opět jsou zde dvě komponenty a orientaci je třeba určit pro obě zvlášť. Ve třetím příkladu snadno zjistíte, že $\nu_S = (0, 0, 0, 1)$ a ∂S je zde jednotková sféra v $\mathbb{R}^3$ s obvyklou orientací (vnořená do $\mathbb{R}^4$ přidáním nulové čtvrté souřadnice).