Domácí úkol č. 1 (G2, 2022)

Nechť $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných třídy C^1 (tedy je restrikcí C^1 funkce definované na nějaké otevřené množině). Uvažujme posloupnost triangulací čtverce $[0,1]^2$ definovanou následovně: pro $n = 1, 2, \ldots$ je $\mathcal{T}_n$ množina všech pravoúhlých trojúhelníků s vrcholy v bodech $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$, $0 \le i, j \le n$, s odvěsnami délky $\frac{1}{n}$ rovnoběžnými s osami x, y a s přeponami rovnoběžnými s diagonálou $\{(t,t) : 0 \le t \le 1\}$. Pro každý $T \in \mathcal{T}_n$ nechť $\hat{T}$ je trojúhelník s vrcholy v bodech grafu funkce f příslušných vrcholům T, tedy v bodech $(a_i, f(a_i))$, kde a_i jsou vrcholy T $(i = 1, 2, 3)$. Ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{T\in\mathcal{T}_n} \operatorname{area}(\hat{T}) = \int_{[0,1]^2} \sqrt{1 + \|\nabla f(u)\|^2}\, d\lambda^2(u).$$

Poznámka: Integrálem na pravé straně budeme definovat plošný obsah grafu funkce f. Dokazovaná rovnost říká, že příslušný integrál je roven limitě ploch aproximací po částech afinními plochami generovanými danou posloupností triangulací integračního oboru.

Návod najdete k poznámách k prvnímu cvičení.