9. cvičení (11.4.2023)

1) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ otevřená, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ C^∞ vekt. pole

Pak $I := \int_S (F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy)$

$$= \int_S \langle F, \nu \rangle\, dS,$$

kdykoliv $S \subset \mathbb{R}^3$ je 2-plocha a $\nu: S \to S^2$ je vnější normálové pole na S

(tedy $\nu(x) \wedge \tau(x) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, τ orientace).

Je-li $S = \varphi(U)$ jednoduchá, pak

$$I = \int_U \left\langle F, \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right\rangle d\lambda^2.$$

2) (z přednášky): $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha,

$S = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q$ rozklad,

$S_1, \dots, S_p$ jednod. k-plochy shodně orientované s S, M_j plochy dim. $< k$,

$\Omega \supset S$ otevř., $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$

$$\Rightarrow \int_S \omega = \sum_{i=1}^{p} \int_{S_i} \omega, \text{ pokud } \int_S \omega \text{ konverguje.}$$

(3) $S = \{x^2+y^2 = 2z,\ x>0,\ y>0,\ z<\frac{1}{2}\} \subset \mathbb{R}^3$

orientace: $\langle \nu, e_3 \rangle < 0$

$\omega = y\,dz \wedge dx$

Spočtěte $\int_S \omega$. $\left[-\frac{\pi}{4}\right]$

(4) $S = \{x^2+y^2+z^2 = a^2\}$, orientace vnější

$\left(\nu(x,y,z) = a^{-1}(x,y,z)\right)$

Spočtěte $\int_S (x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy)$. $[4\pi a^3]$

(5) Spočtěte $\int_S (xy+yz+zx)\,dS$

$S = \{z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 < 2ax\}$ $\left[\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4\right]$