# 8. cvičení (4.4.2023)

(1) Möbiův pásek:

$$\varphi: \begin{cases} x = \left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u \\ y = \left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u \\ z = \frac{v}{2}\sin\frac{u}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} u \in \mathbb{R} \\ v \in (-1,1) \end{array}$$

- nelze zvolit spojitě orientaci

(neorientovatelná plocha)

(2) Hodgeho dualita (Hodge star operator)

Def operaci $* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda_{n-1}(\mathbb{R}^n)$

$$v \longmapsto *v$$

vztahem:

$$\boxed{u \wedge (*v) = \langle u, v \rangle \, e_1 \wedge \dots \wedge e_n, \quad u \in \mathbb{R}^n}$$

Ukažte:

(a) $*$ je řádně def. lineární izomorfismus

(b) $*e_i = (-1)^{i-1} e_1 \wedge \dots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \dots \wedge e_n$

(c) $*v = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \iff v = v_1 \times \dots \times v_{n-1}$

(vekt. součin)

(d) $\|*v\| = \|v\|$

(3) (a) nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nepr. otevřená,

$\partial\Omega$ $(n-1)$-plocha

$\Rightarrow \forall x \in \partial\Omega \; \exists \, \nu(x)$ … jednot. vektor vnější normály

$x \mapsto \nu(x)$ je hladké zobr.

($\partial\Omega$ lze na okolí $x$ repr. jako graf funkce)

Položme $\tau(x) := * \, \nu(x)$, $x \in \partial\Omega$.

- $\tau$ je hladké, tedy spojité zobr.
- $\tau(x) \in \Lambda_{n-1}(T_x(\partial\Omega))$

$\Rightarrow \tau$ je orientace $\partial\Omega$

(b) $S \subset \mathbb{R}^n$ $(n-1)$-plocha

$\nu : S \to S^{n-1}$ spojité, $\forall x \in S: \nu(x) \perp T_x S$

(normálové vekt. pole)

$\Rightarrow \tau(x) := * \, \nu(x)$ je orientace $S$.

Tedy orientaci $(n-1)$-ploch v $\mathbb{R}^n$ lze ekvivalentně zadat spojitým normálovým polem.