6. cvičení G2 (21.3.2023)

1) Spočtěte $\int_{\partial\Omega} \langle (x^2, y^2, z^2), \nu(x,y,z) \rangle \, dS$,

$\Omega = (0,a)^3$, ν jednotk. vnější norm. vektor $[3a^4]$

2) Spočtěte $\int_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, S je povrch

čtyřstěnu $\{x+y+z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$.

3) Spočtěte plošný obsah množiny

$S = \{(x,y,z) : z = xy, x^2+y^2 < 4\}$. $\left[\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)\right]$

4) Těžiště k-plochy $S \subset \mathbb{R}^n$ je def. jako

$$t = \frac{\int_S x \, dS(x)}{\int_S dS(x)}.$$

[Zdůvodnění: Při „uchycení" plochy S v bodě t působí v bodě $x \in S$ gravitační síla ve směru ν velikosti $\langle x-t, \nu \rangle$, celkový moment síly je tedy $\int_S \langle x-t, \nu \rangle \, dS(x) = 0$.]

Najděte těžiště plochy $S = \{z = x^2+y^2 < a^2\}$.

5) Z přednášky: vnější algebra

$$\Lambda^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(\mathbb{R}^n),$$

báze $\{e_I^* = dx_I,\ I \subset \{1,\dots,n\}\}$.

<u>Vnější součin</u> je def. na vekt. báze

$$e_I^* \wedge e_J^* := \begin{cases} \operatorname{sgn}(I,J)\, e^*_{I\cup J}, & I\cap J=\emptyset, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}$$

a dodef. lineárně.

$\operatorname{sgn}(I,J) := \operatorname{sgn} \pi(I,J)$, kde $\pi(I,J)$ je permutace na $|I|+|J|$ zobraz. prvních $|I|$ prvků rost. usp. na I a zbylé prvky rost. usp. na J.

Ukažte: $f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n),\ g \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f\wedge g \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$,

(a) $g\wedge f = (-1)^{kl} f\wedge g$,

(b) $(f\wedge g)(v_1,\dots,v_{k+l}) = \sum_{\sigma\in\Sigma(k,l)} f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\, g(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})$

$$\Sigma(k,l) := \{\sigma\in\Sigma(k+l) : \sigma(1)<\dots<\sigma(k),\ \sigma(k+1)<\dots<\sigma(k+l)\}$$

$$\left(\#\Sigma(k,l) = \binom{k+l}{k}\right)$$

~~(c)~~

6) Ukažte, že 2-vektor

$$\alpha := e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$$

<u>není</u> jednoduchý.

<u>Návod:</u> kdyby $\alpha = u \wedge v$ (jednoduchý),

pak $u \wedge \alpha = 0 \Rightarrow u \wedge e_1 \wedge e_2 + u \wedge e_3 \wedge e_4 = 0$

$\Rightarrow u = 0$ (spor).