5. cvičení G2 (14.3.2023)

1 ~~7~~) Ukažte: je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha, pak pro $a > 0$ je $aS := \{ax : x \in S\}$ k-plocha, a popište vztah měr μ_S a μ_{aS}.

2 ~~8~~) Je-li $V(r) = \lambda^n(B(0,r))$, $r > 0$, pak $V'(r)$ je obsah sféry $\{\|x\| = r\}$.
Ukažte pro: (a) $n = 3$,
(b) obecné n.

3) Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ zároveň k-plocha a zobec. k-plocha (tř. C^1), pak obě definice μ_S splývají.
Obecná k-plocha nemusí být zobecněná k-plocha!

4) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\partial\Omega$ zobec. $(n-1)$-plocha, $x \in \partial\Omega$ regulární bod (tedy leží v nějaké komponentě $S_i \subset \partial\Omega$, kt. je $(n-1)$-plochou). Vyjádřete $\nu(x)$ (jednotk. vektor vnějš. normály), pokud je $\partial\Omega$ popsána (a) parametricky, (b) rovnicí (implicitně).

5) <u>Divergence</u> vektorového pole

$$T : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{div} T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_i}{\partial x_i}$$

udává „míru rozpínání či smršťování":

$\operatorname{div} T > 0$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{div} T < 0$

<u>Věta o divergenci</u>: $\displaystyle\int_{\Omega} \operatorname{div} T \, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} \langle T, \nu \rangle \, dS$.

6) (a) $\forall v \in \mathbb{R}^n : \displaystyle\int_{\partial\Omega} \langle v, \nu \rangle \, dS = 0$.

(b) $\lambda^3(\Omega) = \dfrac{1}{3} \displaystyle\int_{\partial\Omega} \langle x, \nu(x) \rangle \, dS(x)$.

(ukažte.)

7) $\Omega = \{ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \}$

Spočtěte $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \langle (x^3, y^3, z^3), \nu(x,y,z) \rangle \, dS(x,y,z)$.