

4. cvičení 62 (7.3.2023)

1) (Rotace plochy) - příklady - kvadriky v \mathbb{R}^3 :

- sféra ($x^2 + y^2 + z^2 = r^2$)

- elipsoid ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$) (nemí rotace)

- jednodílný hyperboloid: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right)$$

- dvoudílný hyperboloid: $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

$$\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right)$$

- eliptický paraboloid: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

- hyperbolický paraboloid: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

(nemí rotace!)

(a) najděte mapy uvedených ploch.

(b) napište rovnici keří roviny jednodíln. paraboloidu v bodech: (i) $(1, 0, 0)$

$$(x^2 + y^2 - z^2 = 1)$$

(ii) $(1, 1, 1)$

(iii) (k, y, z)

2) Spočítejte $\int_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$, kde

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

3) Spočítejte (vyjádřete) $\mu_S(\{x^2 + y^2 - z^2 = 1, |z| \leq 1\})$

Použijte parametrizaci

$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v \\ y = \cosh u \sin v \\ z = \sinh u \end{cases}$$

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

$$\cosh' u = \sinh u, \quad \sinh' u = \cosh u$$

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1, \quad \cosh^2 u + \sinh^2 u = \cosh(2u)$$

4) Ukážete, že osmístěn $S = \{|x| + |y| + |z| = a\}$ je zobecněná plocha a spočítejte

$$\int_S (x^2 + y^2 + z^2) dS.$$

5) $\int_S z dS$, $S = \{(u \cos v, u \sin v, v) : 0 < u < a, 0 < v < 2\pi\}$ ↓
přímá

(stoubová plocha)

6) $\int_S (xy + xz + yz) dS$, $S = \{z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 < 2ax\}$