3. cvičení B2 (28.2.2023)

1) Popište tečný prostor $T_x S$ pro plochu zadanou

a) mapou: $\varphi: U \subset \mathbb{R}^k \to S$, $\varphi(u) = x$

b) explicitně: $S = \text{graf } h$, $h: U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$

c) implicitně: $S = \{x : f(x) = 0\}$, $f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$

2) Plocha má jednoznačně určenou dimenzi:

$S = \varphi(U) = \psi(V)$ ~~jedn.~~, $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ k-mapa, $\psi: V \to \mathbb{R}^n$ l-mapa $\Rightarrow$ $k = l$. Plyne z:

Brouwerova věta o invarianci:

$U \subset \mathbb{R}^k$ otevř., $f: U \to \mathbb{R}^k$ prosté, spojité $\Rightarrow$ $f(U) \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená (a f^{-1} je spojité).

[bez důkazu]

? Jak tvrzení plyne z Brouwerovy věty ?

3) Míra na jednoduché k-ploše $S=\varphi(U)$:

$$\mu_S(B) \overset{\text{def.}}{=} \int_{\varphi^{-1}(B)} J_k\varphi(u)\, d\lambda^k(u), \qquad B\in\mathfrak{B}^n\cap S$$

$$J_k\varphi(u) = \det\sqrt{D\varphi(u)^T D\varphi(u)}$$

Př.: $S = \text{graf } h$, $\quad h: U\subset\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, C^1

$$\text{graf } h = \{(u,h(u)) : u\in U\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$$

$\varphi: u \mapsto (u,\varphi(u))$ mapa

$$D\varphi(u) = \begin{bmatrix} I_k \\ \hline \nabla h(u) \end{bmatrix}, \quad D\varphi(u)^T D\varphi(u) = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial h}{\partial u_i}(u)\frac{\partial h}{\partial u_j}(u)\right)_{i,j=1}^{k}$$

$$= I_k + \nabla h(u)\,\nabla h(u)^T$$

*) Sylvester $\Rightarrow$ $\det D\varphi(u)^T D\varphi(u) = 1+\|\nabla h(u)\|^2$

(viz na konci)

Dk.: $\det\begin{pmatrix} I_k & a \\ a^T & 1\end{pmatrix} = \det I_k + \det a^T a = 1 + a$

$= \det I_k \cdot \det(1 - a^T(-a)) = 1 - a^T a$

$= \det I_k - \det(-a) I_k^{-1} a^T = \cancel{1+\det}\ \det(I_k + a a^T)$

$$\mu_{\text{graf } h}\left(\{(u,h(u)) : u\in B\}\right) = \int_B \sqrt{1+\|\nabla h(u)\|^2}\, d\lambda^k(u)$$

4) Spočtěte obsah horní polosféry

$$S_+^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1,\ x_n > 0\}.$$

Řešení: $h(x_1, \dots, x_{n-1}) := \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$,

$$U_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < 1\}$$

$$\nabla h(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \quad J_{n-1}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$$

$$x = (x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$\mu(S_+^{n-1}) = \int_{U_{n-1}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$$

<u>$n=3$:</u> $\mu(S_+^2) = \int_{U_2} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 2\pi$ (polární souř.)

<u>$n=4$:</u> $\mu(S_+^3) = \dots$

5) Rotační plochy v $\mathbb{R}^3$:

$S \subset \mathbb{R}^3$ rotační $\overset{\text{def.}}{\iff}$ S má osu symetrie

BÚNO: osa symetrie = osa z.

Př.: parametrická 2-plocha

$$\varphi(u,v) = (p(u)\cos v, p(u)\sin v, q(u)),$$

$p \in I$ (int.), $v \in \mathbb{R}$

splňuje: im φ je rotační (osa z)

regularita?

a) Ukažte: jestl. $\underline{p > 0}$ a $p'^2 + q'^2 > 0$ na I,

pak φ splňuje podm. regularity

(rank $D\varphi(u,v) = 2$)

b) Je-li navíc $u \mapsto (p(u), q(u))$, $u \in I$,

homeomorfismus, pak je $\varphi|_{I \times (0,2\pi)}$ mapa.

c) Najděte p, q pro případ: (i) sféry,

(ii) jednodílného hyperboloidu

$$\{x^2+y^2-z^2 = 1\}.$$

*) Sylvesterův vzorec:

$$a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \underline{\det\left(I_n + ab^T\right) = 1 + a^T b}$$

Dk.:

$$A = \begin{pmatrix} I_n, & -a \\ b^T, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n, & 0 \\ b^T, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n, & 0 \\ 0, & 1 + b^T a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n, & -a \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \qquad = \begin{pmatrix} I_n, & -a \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n + ab^T, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n, & 0 \\ b^T, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = 1 \cdot \left(1 + b^T a\right) \cdot 1 = 1 \cdot \det\left(I_n + ab^T\right) \cdot 1$$