2. cvičení (21. 2. 2023)

Plochy: Připomenutí definic: k-mapa, k-plocha v $\mathbb{R}^n$

1) $\boxed{\text{sféra } S^2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}}$.

(a) Najděte atlas S^2 sestávající z grafů funkcí.

(b) Ukažte, že

$$\varphi : (u,v) \longmapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v),$$

$$u \in (-\pi, \pi), \quad v \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

je mapa S^2 (věta z přednášky!)

Popište $\operatorname{im} \varphi$. [sférické souřadnice]

Najděte rotaci $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takovou, aby φ a $\psi = \rho \circ \varphi$ tvořily atlas S^2.

(c) Najděte předpis pro zobrazení $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ splňující: bod $\phi(u,v)$ leží v průniku sféry S^2 s polopřímkou $\{(tu, tv, 1-t) : t > 0\}$.
Najděte předpis i pro ϕ^{-1}. Ukažte, že ϕ je mapa a určete $\operatorname{im} \phi$. [stereografická projekce]

Řešení: $\phi^{-1}: \begin{cases} u = \dfrac{x}{1-z} \\ v = \dfrac{y}{1-z} \end{cases} \Big| \; (x,y,z) \in \underbrace{S^2 \setminus \{(0,0,1)\}}_{\text{im } \phi}$

$$\phi: \begin{cases} x = \dfrac{2u}{1+u^2+v^2} \\ y = \dfrac{2v}{1+u^2+v^2} \\ z = \dfrac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \end{cases}$$

---

2) Uveďte příklad 2-plochy v $\mathbb{R}^3$, která je:
- kompaktní
- omezená nekompaktní
- neomezená uzavřená
- neomezená neuzavřená

3) Příklad (Najděte) prosté parametrizované 2-plochy v $\mathbb{R}^3$, která není mapou.

[$\varphi(u,v) = (u^3-4u,\, u^2-4,\, v)$, $u \in (-2,4)$, $v \in (0,1)$]

4)* Je spirála $S = \{(e^t \cos t, e^t \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$ 1-plocha? Je $\bar{S}$ 1-plocha?

[$\bar{S} = S \cup \{0\}$, na okolí 0 není $\bar{S}$ grafem funkce]

5) Poznámka:

Plocha má jednoznačně určenou dimenzi, tedy pokud $S = \varphi(U) = \psi(V)$ pro k-mapu $\varphi : U \to S$ a l-mapu $\psi : V \to S$, pak $k = l$.

Plyne z Browerovy věty o invarianci:

[$U \subset \mathbb{R}^k$ otevřená, $f : U \to \mathbb{R}^k$ prosté, spojité $\Rightarrow$ $f(U)$ je otevřená (v $\mathbb{R}^k$). [bez důkazu]

→ Ukažte, jak tvrzení plyne z Browerovy věty.

6) Vektorový součin v $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$

$v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$

$L : w \mapsto \det(w, v_1, \dots, v_{n-1})$ ... lin. zobr.

$\Rightarrow \exists!\, v \in \mathbb{R}^n : \; Lw = \langle v, w \rangle, \; w \in \mathbb{R}^n.$

Def. $v := v_1 \times \dots \times v_{n-1}$, tedy:

$$\boxed{\langle w, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle = \det(w, v_1, \dots, v_{n-1}), \; w \in \mathbb{R}^n}$$

v souřadnicích: $v_1 \times \dots \times v_{n-1} = \left(\det(e_i, v_1, \dots, v_{n-1})\right)_{i=1}^{n}$.

$\underline{n=2}$: $v \longmapsto \times v$ (unární operace)

$$\times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} \quad (\text{otočení o } \tfrac{\pi}{2})$$

$\underline{n=3}$: $u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)^T$.

<u>Vlastnosti:</u>

(1) $v_1 \times \dots \times v_{n-1} = 0 \iff v_1, \dots, v_{n-1}$ lin. záv.

(2) $\langle v_i, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle = 0$, $i = 1, \dots, n-1$

(3) $v_{\sigma(1)} \times \dots \times v_{\sigma(n-1)} = (\operatorname{sgn} \sigma)\, v_1 \times \dots \times v_{n-1}$

(4) $\| v_1 \times \dots \times v_{n-1} \| = \lambda^{n-1}\left(P(v_1, \dots, v_{n-1})\right)$
$$= \sqrt{\det\left(\langle v_i, v_j \rangle\right)_{i,j=1}^{n-1}}$$

[dk.: $\| v_1 \times \dots \times v_{n-1} \|^2 =$

$= \langle v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle$

$= \det(v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1})$

(kolmost) $= \| v_1 \times \dots \times v_{n-1} \| \; \lambda^{n-1}\left(P(v_1, \dots, v_{n-1})\right)$