1. cvičení G2 (13.2.2023)

1) Obsah rovnoběžníku:

$u, v \in \mathbb{R}^2; \quad P(u,v) := \{su + tv : 0 \leq s,t \leq 1\}$

$$\lambda^2(P(u,v)) = |\det(u,v)| = \left| \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right| = |\langle u, \tilde{v} \rangle|$$

$$= \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin\alpha \qquad \tilde{v} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$$

$$= \|u\| \cdot \|\tilde{v}\| \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Př.: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad [\,|10|\,]$

2) Objem rovnoběžnostěnu:

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n, \; P(v_1, \dots, v_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i : 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$

$$\lambda^n(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

Dk.: indukcí

- $n = 2$ … víme
- $v_1, \dots, v_n$ lin. záv.: $0 = 0$
- $v_1, \dots, v_n$ lin. nez.: otočíme, aby

$\mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{n-1}) = \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_{n-1})$

Fubini: $\lambda^n(P(v_1,\dots,v_n)) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{n-1}\Big(\underbrace{P(v_1,\dots,v_n) \cap \{x_n = t\}}_{P(v_1,\dots,v_{n-1}) + \frac{t}{(v_n)_n} v_n \quad (0 \le t \le |(v_n)_n|)}\Big)\, dt$$

$$= P(v_1,\dots,v_{n-1}) \cdot |(v_n)_n|$$

$$= |\det(v_1,\dots,v_n)|.$$

3) <u>Gramův determinant</u>

$v_1,\dots,v_k \in \mathbb{R}^n \quad (k \le n)$, $L := (v_1,\dots,v_k)$ (matice $n \times k$)

$L^T L$ ... matice $k \times k$

$L^T L = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1}^{k}$ ... Gramova matice

$\det(L^T L)$ ... <u>Gramův determinant</u> $v_1,\dots,v_k$

<u>Pozn.:</u> $k = n \Rightarrow \det(L^T L) = (\det L)^2$

$$\Rightarrow \lambda^n(P(v_1,\dots,v_n)) = \sqrt{\det(L^T L)}$$

Označme $M := \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_k)$, neboť $\underline{\dim M = k}$.

$R: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrie (lineární) zobrazující

M na $\mathrm{Lin}\{e_1, \dots, e_k) \cong \mathbb{R}^k$

$\Pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ projekce: $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$

$\Pi \circ R \circ L: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ lineární

$$|\det(\Pi \circ R \circ L)| = \sqrt{\det (\Pi \circ R \circ L)^T (\Pi \circ R \circ L)}$$
$$= \sqrt{\det (L^T R^T \underbrace{\Pi^T \Pi}_{I} R L)}$$
$$= \sqrt{\det (L^T \underbrace{R^T R}_{I} L)}$$
$$= \sqrt{\det (L^T L)}$$

Tedy podle věty o substituci (teorie míry):

$$\lambda^k(\Pi \circ R \circ L(B)) = \sqrt{\det(L^T L)}\ \lambda^k(B), \quad B \in \mathcal{B}^k.$$

Def. míru λ_M na M takto:

$\mathcal{B}(M) = \{B \cap M : B \in \mathcal{B}^n\}$ ... borel. podmnožiny M

$$\boxed{\lambda_M(B) := \lambda^k(\Pi \circ R(B))} = \sqrt{\det(L^T L)}\ \lambda^k(L^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(M).$$

Cvičení: ověřte, že λ_M je míra.

Př.: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $M = \mathrm{Lin}(v_1, v_2) \subset \mathbb{R}^3$

Spočtěte $\lambda_M(B)$ pro $B = \{t_1 v_1 + t_2 v_2 : 0 \le t_1 \le 1, -1 \le t_2 \le 2\}$

4) Cauchy-Binetův vzorec

Věta: A, B matice $n \times k$. Pak

$$(*) \quad \det(A^T B) = \sum_{|I| = k} (\det A_I)(\det B_I),$$

kde součet probíhá přes $I = \{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n\}$ a A_I, B_I jsou matice $k \times k$ s řádky z I.

Dk.: $A = (a_1, \dots, a_k)$, $B = (b_1, \dots, b_k)$

Obě strany $(*)$ jsou lineární funkce vektorů $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$. Rovnost tedy stačí ukázat pro případ $a_i = e_{p(i)}$, $b_j = e_{q(j)}$.

$p, q : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$ | $(e_1, \dots, e_n)$ kanon. báze

• Pokud p nebo q není prosté: $0 = 0$.

• prohození ~~dvou vektorů~~ a_i, a_j či b_i, b_j
způsobí ~~změnu znaménka~~ na obou stranách

• $I := \{p(1), \dots, p(k)\}$, $J := \{q(1), \dots, q(k)\}$

• $I \neq J \Rightarrow 0 = 0$

• $I = J$: prohozením pořadí dvou vektorů ~~ne~~ v I nebo J způsobíme změnu znam. na obou stranách

• $I = \{p(1) < \dots < p(k)\}$, $J = \{q(1) < \dots < q(k)\}$
$1 = 1.$ $\square$

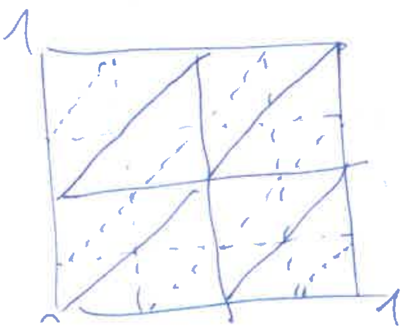
<u>Důsledky:</u> (a) $\det(A^T A) = \sum_{|I|=k} (\det A_I)^2$

(b) hodnost $A = k \Rightarrow \exists I, |I| = k, A_I$ reg.

5) <u>domácí úkol č. 1</u>

$f : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funkce dvou prom. třídy C^1

$M \in \mathbb{N}$ … T_M … triangulace



$T_2, T_4, \dots$

$T \in \mathcal{T}_n$ s vrcholy a_1, a_2, a_3

$\hat{T} :=$ trojúhelník v $\mathbb{R}^3$ s vrcholy $(a_i, f(a_i))$, $i = 1,2,3$

Ukažte:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{T \in \mathcal{T}_n} \operatorname{area}(\hat{T}) = \int_{[0,1]^2} \sqrt{1 + \|\nabla f(u)\|^2}\, d\lambda^2(u)}.$$

Návod: 1) součet na levé straně $= \int_{[0,1]^2} f_n \, d\lambda^2$,

kde

$$f_n(x,y) = \frac{\operatorname{area}(\hat{T})}{\operatorname{area}(T)}, \quad (x,y) \in T \in \mathcal{T}_n.$$

2) Ukažte, že $\boxed{f_n(u) \rightrightarrows \sqrt{1 + \|\nabla f(u)\|^2} \text{ na } [0,1]^2}$

(stejnoměrná konvergence:

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } A \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \sup_{u\in A} |f_n(u) - f(u)| = 0)$$

Z toho už plyne

$$\int_{[0,1]^2} f_n \, d\lambda^2 \longrightarrow \int_{[0,1]^2} \sqrt{1 + \|\nabla f(u)\|^2}\, d\lambda^2(u).$$

3) Parc. derivace $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité na kompaktu $[0,1]^2$, tedy jsou <u>stejnoměrně</u> spojité. Tudíž:

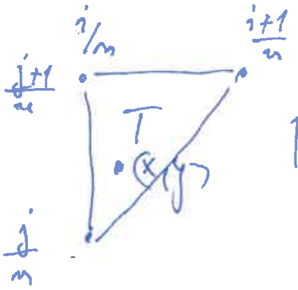
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \ \forall x, x', y, y', \ |x - x'| \leq \frac{1}{n}, \ |y - y'| \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x', y') - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x', y') - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < \varepsilon.$$

4) n $T \in \mathcal{T}_n$:

$(x, y) \in T$



podle Lagrangeovy věty:

$$\left| n\left(f\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n}\right)\right) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| < \varepsilon$$

$$\left| n\left(f\left(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\right) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < \varepsilon.$$