14. cvičenie (16.5.2023)

1) Z prednášky: $c: I \to S$ je geodetika $\Longleftrightarrow$

$$\det(c'(t), c''(t), N(c(t))) = 0, \ t \in I$$

$$k_g(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t), N(c(t)))}{\|c'(t)\|}.$$

Ukážte, že $|k_g(t)|$ nezávisí na parametrizácii krivky (ani plochy).

2) Spočítajte geodet. krivosť kružnice o polomere r na sfére o polomere $R > r$.

[použijte vzťah $k^2(t) = k_n^2(c(t)) + k_g^2(t)$.]

3) Overte, že špirály ($x = \cos(t - t_0)$, $y = \sin(t - t_0)$, $z = \beta t$) sú geodetiky na valcovej ploche $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

4) <u>Christoffelovy symboly plochy:</u>

$\varphi : U \to S$ mapa, $\varphi_i := \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$, $\varphi_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}$, $n_i = \frac{\partial n}{\partial u_i}$ ...

$$\varphi_{ij} = \Gamma^1_{ij} \varphi_1 + \Gamma^2_{ij} \varphi_2 + h^{ij} n \quad \rightsquigarrow \text{def. } \Gamma^k_{ij}$$

Ukažte:

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{ij} \\ \Gamma^2_{ij} \end{pmatrix} = \left(g^{-1}\right) \begin{pmatrix} \langle \varphi_{ij}, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_{ij}, \varphi_2 \rangle \end{pmatrix} \qquad (1 \le i,j \le 2)$$

5) <u>Geodetiky na rotační ploše</u>

$$\varphi(u,v) = (p(u)\cos v,\, p(u)\sin v,\, q(u)) \quad (p > 0,\, \underline{p'^2 + q'^2 = 1})$$

$$g = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & p^2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^1_{22} = -pp', \quad \Gamma^2_{12} = \frac{p'}{p},$$

ostatní $\Gamma^k_{ij} = 0$.

(<u>upozornění</u>: $u' = \frac{du}{dt}$, $p' = \frac{dp}{du}$ (!))

rovnice pro param. geodetiky:

$$\begin{cases} u'' - pp'(v')^2 = 0 \\ v'' + 2\frac{p'}{p} u'v' = 0 \end{cases}$$

$c(t) = (u(t), v(t))$ param. geodetika

$\alpha(t) = \sphericalangle(c'(t), \{z = \text{const}\})$

$$\cos\alpha = \frac{\langle c', \varphi_2 \rangle}{\|c'\| \, \|\varphi_2\|} = \frac{v' p^2}{\|c'\| \, p} = \frac{v' p}{\|c'\|}$$

derivace podle t $(p = p \circ u)$:

$$(p \cdot \cos\alpha)' = \frac{\left(v'(p \circ u)^2\right)'}{\|c'\|} = \frac{p^2}{\|c'\|}\left(v'' + 2\frac{p'}{p}u'v'\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad p(u(t)) \cdot \cos\alpha(t) = \text{konst.}$$

(cos α nepřímo úměrný vzdál. od osy z)

6, Najděte rovnice pro geodetiky na šroubové ploše

$$\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv) \qquad (b>0).$$

$$\left[\begin{cases} u'' - u(v')^2 = 0 \\ v'' + 2\dfrac{u}{u^2+b^2}u'v' = 0 \end{cases}\right]$$