

### 13. cvičení (9.5.2023)

Připomenutí z předchozího:

Hlavní křivosti  $\lambda_1, \lambda_2$  a hlavní směry  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^2$   
plochy  $S$  s mapou  $\varphi: U \rightarrow S$  v bodě  $x = \varphi(u)$   
hledáme řešením rovnic:

$$(*) \quad (h_u - \lambda g_u) \xi = 0,$$

$$(**) \quad \det(h_u - \lambda g_u) = 0.$$

$$K(u) = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\det h_u}{\det g_u} \quad \text{Gaussova křivost}$$

$$H(u) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{h_u^{11} g_u^{22} + h_u^{22} g_u^{11} - 2 h_u^{12} g_u^{12}}{2 \det g_u} \quad \text{střední křivost}$$

1) Najděte hlavní křivosti, hlavní směry, Gaussovu a střední křivost pro trojúhelníkovou plochu  
s mapou

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$$

$$(u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R})$$

$$[b > 0 \text{ pevné}]$$

2) Najděte levou směr a levou křivku na obvodu rotace plochy (viz příklad 2a z minule).

3) Def.: Směr  $0 \neq X \in T_x S$  je asymptotický směr plochy  $S$  v bodě  $x$ , je-li  $\Pi_x(X, X) = 0$ .

Ukážte: (a)  $K(x) > 0 \Rightarrow$  v bodě  $x$  nemá žádný asympt. směr -

(b)  $K(x) < 0 \Rightarrow$  v bodě  $x$  jsou <sup>práve</sup> dva různé asympt. směry (modulo násobek)

(c)  $K(x) = 0, H(x) \neq 0 \Rightarrow$  v bodě  $x$  je <sup>práve</sup> jeden as. směr

(d)  $K(x) = 0, H(x) = 0 \Rightarrow$  v bodě  $x$  je každý směr asymptotický -

[ Návod: normalová křivka málokdy (lokálně) extrémně pouze v  $\pm X_1, \pm X_2, X_1, X_2$  hl. směry ]

4) Křivka  $c: I \rightarrow S$  na ploše  $S$  je asymptotická,  
 jestliže  $\forall t \in I: c'(t)$  je asympt. směr v b.  $c(t)$ .

$c$  je asymptotická  $\Leftrightarrow$

$$h^{11}(u')^2 + 2h^{12}u'v' + h^{22}(v')^2 = 0$$

$$\left( h_{(u,v)} = \begin{pmatrix} h^{11} & h^{12} \\ h^{21} & h^{22} \end{pmatrix}, c(t) = (u(t), v(t)) \right)$$

5) Najděte diferenc. rovnici pro asymptotické křivky  
 na toru.

6) Ukažte Eulerův vzorec:

$$K_m(X) = (\cos^2 \alpha) \lambda_1 + (\sin^2 \alpha) \lambda_2, \quad X \in T_x^1 S$$

$\alpha = \angle(X, X_1)$ ,  $X_1$  hl. směr příslušný  $\lambda_1$ ,

$\lambda_1, \lambda_2$  hl. křivosti (viz v bodě  $x \in S$ ).

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Návod: } K_m(X) = \Pi_x(X, X) = \langle L_x X, X \rangle \quad (\|X\|=1) \\ X = (\cos \alpha) X_1 + (\sin \alpha) X_2 \end{array} \right]$$

7) Průnikové plochy: parametrizace

$$\varphi(u, v) = c(u) + v X(u)$$

$c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  reg. par. křivka

$X: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  vekt. pole funkce

Pr.:  $\varphi(u, v) = c(u) + v c'(u)$

Najděte Gaussovu a střední křivku.