12. cvičení (2.5.2023)

1) $S = \{z = x^2+y^2, -1 \leq x, y \leq 1\}$

S orient. normálou N_S splňující $\langle N_S, e_3\rangle > 0$.

Spočtěte $\int_{\partial S} xz\, dy$. $\left[\frac{16}{3}\right]$

2) První a druhá fundamentální forma plochy.

a) $S = \{x^2+y^2+z^2 = r^2\}$ $N(x,y,z)$ směřuje ven.

sfér. souř.: $\varphi \begin{cases} x = r\cos u \cos v \\ y = r \sin u \cos v \\ z = r \sin v \end{cases} \quad \begin{array}{l} u \in (-\pi, \pi) \\ v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{array}$

$$g_{u,v} = \begin{pmatrix} r^2\cos^2 v, & 0 \\ 0, & r^2 \end{pmatrix}, \quad h_{u,v} = \begin{pmatrix} r^2\cos^2 v, & 0 \\ 0, & r \end{pmatrix}$$

b) S vznikne rotací křivky c podle osy z

$c(u) = (p(u), 0, q(u))^T$, $p(u) > 0$, $p'(u)^2 + q'(u)^2 > 0$.

mapa: $\begin{cases} x = p(u)\cos v \\ y = p(u)\sin v \\ z = q(u) \end{cases} \quad \begin{array}{l} u \in I \\ v \in (-\pi, \pi) \end{array}$

normála: $m(u,v) = \frac{1}{\sqrt{p'^2+q'^2}}\left(-q'\cos v, -q'\sin v, p'\right)$

$$g_{u,v} = \begin{pmatrix} p'^2+q'^2 , & 0 \\ 0 , & p^2 \end{pmatrix}, \quad h_{u,v} = \frac{1}{\sqrt{p'^2+q'^2}}\begin{pmatrix} p'q''-q'p'' , & 0 \\ 0 , & pq' \end{pmatrix}$$

3) $S \subset \mathbb{R}^3$ orient. plocha s atlasem $\mathcal{A}$

$\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ shodnost, $\rho : x \mapsto b + Rx$, $R^T R = I$

Pak $\bar{S} = \rho(S)$ je orient. plocha s atlasem

$\bar{\mathcal{A}} = \{\rho \circ \varphi : \varphi \in \mathcal{A}\}$ a pro její normálu $\bar{N}$

a 1. a 2. f.f. $\bar{g}, \bar{h}$ platí:

- $\bar{N}(\rho(x)) = \sigma R(N(x))$ $\quad (\sigma = \det R \in \{-1, 1\})$
- $\bar{g}_u = g_u$
- $\bar{h}_u = \sigma h_u$.

Dk.: Platí: $\underline{Ru \times Rv = \sigma R(u \times v), \quad u, v \in \mathbb{R}^2}$

(ověřte!)

$$\Rightarrow \bar{m}(u) = \sigma R\, m(u); \quad D\bar{m}(u) = \sigma R\, Dm(u)$$

$$\begin{aligned}\bar{g}_u(\xi,\zeta) &= \langle D(\rho\circ\varphi)(u)\xi, D(\rho\circ\varphi)(u)\zeta \rangle \\ &= \langle R\, D\varphi(u)\xi, R\, D\varphi(u)\zeta \rangle \\ &= \langle D\varphi(u)\xi, D\varphi(u)\zeta \rangle = g_u(\xi,\zeta)\end{aligned}$$

4) Greenova věta:

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ jednoduchá, uzavřená, po částech hladká křivka, kladně orient.,

$U = \operatorname{int} \gamma$ „vnitřek".

$\Omega \supset \overline{U}$ otevřená, $F \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Pak $$\int_U \operatorname{rot} F \, d\lambda^2 = \int_\gamma F_1 dx + F_2 dy$$

$\left[\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right]$ (křivkový integrál 2. druhu)

Dk.: $\overline{U}$ je těleso se skoro hl. hranicí

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$

Vněj. normála: $N(t) = (y'(t), -x'(t)) / \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

Věta o divergenci pro pole $G = (F_2, -F_1)$:

$$\int_U \underbrace{\operatorname{div} G}_{= \operatorname{rot} F} \, d\lambda^2 = \underbrace{\int_{\partial U} \langle N, G \rangle \, dS}_{= \int_\gamma F_1 dx + F_2 dy}$$

$\left(J_1 \gamma = \sqrt{x'^2 + y'^2}\right)$