11. cvičení (25.4.2023)

1) (k důkazu Stokesovy věty)

$S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ orient. $(n-1)$-plocha (Ω ot.)

$\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\Omega)$, $S \cap \operatorname{spt} \omega$ kompaktní

~~Pak~~ $\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cancel{d} F_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$

Pak $\int_S \omega = \int_S \langle F, \nu \rangle \, dS$,

kde $\nu(x)$ je jedn. vektor vněj. normály v $x \in S$,

$F = (F_1, \dots, F_n)$.

Dk. - pro jednoduchou plochu $S = \operatorname{im} \varphi$:

$$\nu(\varphi(u)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}}(u)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}}(u) \right\|}$$

$$J_{n-1}\varphi(u) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}}(u) \right\|$$

$$\varphi^* \omega = \sum_{i=1}^{n} (F_i \circ \varphi) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}} \right)_i du_1 \wedge \dots \wedge du_{n-1}$$

$$= \langle F, \nu \rangle J_{n-1}\varphi \, du_1 \wedge \dots \wedge du_{n-1}$$

2) Těleso se skoro hladkou hranicí:

$M \subset \mathbb{R}^n$, $M = \overline{U}$, U otevř., $\partial U = \partial M$ zobec. $(n-1)$-plocha

$\partial M = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q$

Př.: $M = \cancel{\{}\, [0,a]^3$

$M = \{ \cancel{(\dots)}\; x^2 + y^2 \le z^2 \le 1 \}$

Najděte přísl. rozklady!

3) $M = \{ |x| + |y| + |z| \le 1 \}$

Spočtěte

$$\int_{\partial M} x^3 \, dy \wedge dz + y^3 \, dz \wedge dx + z^3 \, dx \wedge dy.$$

(Použijte Stokesovu větu.) $\left[\frac{6}{5} \right]$

4) k-plocha se skoro hladkým krajem:

$S = \varphi(M) \subset \mathbb{R}^n$

$M \subset U \subset \mathbb{R}^k$ těleso se skoro hl. hranicí

$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ k-mapa

- $\operatorname{int} S := \varphi(\operatorname{int} M)$ – vnitřek S
  – k-plocha
- $\partial S := \varphi(\partial M)$ – kraj S
  – zobecněná $(k-1)$-plocha

5) $S = \{ x^2+y^2+z^2=a^2,\ x \le 1,\ y \le 1,\ z \le 1,\ x,y,z \ge 0 \}$

$(\sqrt{2} < a < \sqrt{3})$

Ukažte, že S je 2-plocha se skoro hladkým krajem.

[použijte mapu $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $x,y > 0$]