10. cvičení (18.4.2023)

1) $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha, $\varphi: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ k-mapa, $\varphi(\mathcal{U}) \subset S$. Pak $\varphi(\mathcal{U})$ je relativně otevřená podmnožina S (a tedy φ je mapa plochy S).

[Návod: $x \in \varphi(\mathcal{U})$; $\psi: V \to S$ mapa S

$x \in \psi(V)$

$\exists \varepsilon > 0: \; U_\varepsilon(x) \cap S \subset \psi(V)$

$\mathcal{U}_0 := \varphi^{-1}(U_\varepsilon(x)) \subset \mathcal{U}$ otevřená

$V_0 := (\psi^{-1} \circ \varphi)(\mathcal{U}_0) \subset V$ otevřená

$\varphi(\mathcal{U}_0) \subset S$ otevřená]

2) Def. plochy s krajem - připomenutí

Př.: Pro $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \; x \geq \frac{a}{2}\}$

najděte atlas (a) pomocí sfér. souř.

(b) pomocí grafů funkcí

3) Indukovaná orientace hranice

připomenutí definice: $x \in \partial S \subset S$

$\tau_S(x) = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ ... orientace S v x

$\tau_{\partial S}(x) = u_1 \wedge \dots \wedge u_{k-1}$ orientace ∂S v x

$\nu_S(x)$ ... jednot. vněj. norm. vektor

$$\tau_S(x) = \nu_S(x) \wedge \tau_{\partial S}(x)$$

$(\nu_S(x), u_1, \dots, u_{k-1})$ klad. orient. báze

(shodné s $(v_1, \dots, v_k)$)

Př.: Sféra S z př. 2 je orient. „ven" z koule. Najděte indukovanou orientaci ∂S.

4) $S \subset \mathbb{R}^3$ 2-plocha s krajem

- $N(x)$ vněj. norm. vektor orientující S
- $\nu_S(x)$ vněj. norm. vektor (rel.) v bodě kraje $x \in \partial S$
- $t(x)$ tečný vektor urč. orientaci ∂S v x

pak $\det(N(x), \nu_S(x), t(x)) > 0$. Ukažte.

5) Najděte rozklad jednotky (h_j) na $\mathbb{R}$ takový, že $\forall j: \int h_j(x) \sin x \, dx = 0$.

$$\left[\quad f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{x^2}{\pi^2 - x^2}\right), & |x| < \pi \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \right.$$

$$\left. h_j(x) = \frac{f(x - j\pi)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - k\pi)} \quad \right]$$