

Vzorový zkouškový test 2019 - varianta B

Početní část

Příklad 1. Předpokládejme, že počet aut, která projedou mezi 7. a 8. hodinou pracovního dne pražskou ulicí Sokolovská se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$, tj.

$$(1) \quad P(\text{projede } n \text{ aut}) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Předpokládejme dále, že každý řidič s pravděpodobností p překročí na měřeném úseku povolenou rychlost 50 km/h.

- Pomocí (1) vyjádřete pravděpodobnost, že dnes mezi 7. a 8. hodinou projelo ulicí nejvýše 100 aut, ale nejméně 50 aut.
- Určete pravděpodobnost, že právě k řidičů překročí povolenou rychlost v ulici Sokolovská mezi 7. a 8. hodinou. Jaké má rozdělení počet řidičů, kteří překročili rychlost?
- Dozvěděli jsme se, že dnes mezi 7. a 8. hodinou překročilo rychlost 95 řidičů. Jaká je pravděpodobnost, že ulicí Sokolovská mezi 7. a 8. hodinou projíždělo právě n řidičů?

Příklad 2. Bud' $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ((0, 1), \mathcal{B}(0, 1), \lambda)$.

Náhodná veličina $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je dána předpisem $X(\omega) = 1(\omega < \frac{1}{2})$ a náhodná veličina $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je dána předpisem $Y(\omega) = 2\omega - 1$.

- Určete P_X, F_X .
- Určete P_Y, F_Y .
- Určete pravděpodobnost $P(|Y| < X)$.
- Spočtěte $E(X - Y)$.
- Jsou X a Y nezávislé náhodné veličiny?
- * Pro náhodnou veličinu Z definovanou jako $Z = X \cdot Y$ určete P_Z nebo F_Z .

Příklad 3. Předpokládejme, že v posloupnosti 100 měření dochází v každém kroku k náhodné a nezávislé chybě měření. Tyto chyby mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a načítají se. Označme C celkovou chybu měření. Určete hodnotu t , pro kterou bude platit

$$P(-t < C < t) \geq 0.99.$$

Řešte

- pomocí Čebyševovy nerovnosti,
- pomocí centrální limitní věty.

Příklad 4. Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení $N(0, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 > 0$ je neznámý parametr.

- Nalezněte odhad parametru σ^2 metodou maximální věrohodnosti. Vyšetřete, zda je nestranným a konzistentním odhadem parametru σ^2 .
- Označme $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Vyšetřete, zda je $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ nestranným a konzistentním odhadem parametru σ^2 .
- * Zjistěte, zda $V_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=2}^n (X_i - X_{i-1})^2$ je nestranným a konzistentním odhadem parametru σ^2 .

Poznámky: Za každý příklad lze získat až 6 bodů. K úspěšnému napsání písemky je zapotřebí získat alespoň **12 bodů**. Tam, kde je hvězdička, lze získat dva body navíc.

Každou otázku pište, prosím, na **jiný papír**, na který nezapomeňte napsat své **jméno!**

Teoretická část

Otázka 1. Definujte mnohorozměrné normální rozdělení.

- (a) Podrobně odvoďte jeho vektor středních hodnot a varianční matici.
- (b) Odvoďte hustotu mnohorozměrného normálního rozdělení pro případ regulární varianční matice Σ .

Otázka 2. Definujte konvergenci skoro jistě a formulujte větu o silném zákonu velkých čísel.

- (a) Uvažujte nezávislé a stejně rozdělené X_1, X_2, \dots takové, že $P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = -1)$. Splňuje posloupnost těchto náhodných veličin SZVČ? Pokud ano, vyjádřete co nejvíce explicitně, co nám říká.

- (b) Ukažte, že pro $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ platí

$$P(S_n = 0 \text{ pro nekonečně mnoho } n) = 0 \text{ pokud } p \neq \frac{1}{2}.$$

Otázka 3. Definujte intervalový odhad (začněte tím, že máte náhodný výběr, tedy ...).

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z Poissonova rozdělení a \bar{X}_n je výběrový průměr. Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\bar{X}_n}} \leq x\right) = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení. Využijte této znalosti ke konstrukci přibližného intervalového odhadu založeného na centrální limitní větě pro parametr λ .

Poznámky: Za každou otázku lze získat až 6 bodů. K úspěšnému napsání písemky je zapotřebí získat alespoň **9 bodů**. Tam, kde je hvězdička, lze získat dva body navíc.

Doporučujeme **nejdříve** každou otázku alespoň **stručně zodpovědět** (tj. např. zformulovat tvrzení, uvést definici, apod.) a až když Vám zůstane čas, tak se pouštět do podrobnější odpovědi (tj. např. důkazu tvrzení, odvozování, apod.).

Každou otázku pište, prosím, na **jiný papír**, na který nezapomeňte napsat své **jméno!**