

Zápočtové domácí úlohy k přednášce MCMC

1. Pottův model - zobecnění Isingova modelu pro více barev (p. Vlachovský)

Zobecněním Isingova modelu pro více barev (kategorií) je Pottův model. Uvažujme případ čtyř barev, takže při daném grafu $G = (V, E)$ je prostor konfigurací roven $\{1, 2, 3, 4\}^V$. Buď $\beta \geq 0$ inverzní teplota, pak pravděpodobnost konfigurace $\xi \in \{1, 2, 3, 4\}^V$ je rovna

$$\pi_{G,\beta} = \frac{1}{Z_{G,\beta}} \exp \left\{ \beta \sum_{\{x,y\} \in E} I(\xi(x) = \xi(y)) \right\},$$

kde sčítáme přes $\{x, y\}$ neorientované hrany grafu G .

Úkoly:

- Odvoďte úplné podmíněné rozdělení $\pi(\xi(x)|\xi(V \setminus x))$.
- Implementujte Gibbsův výběrový plán:
 - se systematickým výběrem aktualizovaného vrcholu,
 - s rovnoměrným náhodným výběrem aktualizovaného vrcholu,
 - s aktualizací vrcholů v pořadí podle náhodné permutace vrcholů,pro mříž $m \times m$ s různými hodnotami m (např. 20, 40) a různými hodnotami β (např. 0, 0.6, 0.9, 1). K diagnostice konvergence použijte např. počet vrcholů jedné barvy.
- Odvoďte Metropolisův algoritmus (MH algoritmus se symetrickou náhodnou procházkou), kdy návrhové rozdělení vybere rovnoměrně náhodně jeden z vrcholů ve V a s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ změní jeho obarvení na některou ze tří barev, různých od jeho současné barvy.
- Porovnejte efektivitu (rychlost mixování) pro 3 výše uvedené Gibbsovy výběrové plány a Metropolisův algoritmus.

2. Hierarchický Poissonův model (p. Martínek)

Klasická data z Gelfand a Smith (90) obsahují údaje o deseti čerpadlech jaderné elektrárny - počet poruch jednotlivých čerpadel a časy (různé, v tisících hodin), po který byla jednotlivá čerpadla sledována

čerpadlo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet selhání	5	1	5	14	3	19	1	1	4	22
čas sledování	94.32	15.72	62.88	125.76	5.24	31.44	1.05	1.05	2.10	10.48

Zajímají nás intenzity selhání jednotlivých čerpadel. Uvažujme Poissonův model, kdy počet selhání i -tého čerpadla x_i pozorovaného po čas t_i má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda_i t_i$, $i = 1, \dots, 10$, a x_i jsou vzájemně nezávislé. Předpokládejme dále, že parametry λ_i mají $\Gamma(\alpha, \beta)$ rozdělení a parametr β má rovněž $\Gamma(\gamma, \delta)$ rozdělení. λ_i jsou podmíněně nezávislé při daném β .

Úkoly:

- Určete aposteriorní rozdělení pro $(\lambda_1, \dots, \lambda_{10}, \beta)$.
- Určete úplná podmíněná rozdělení pro $(\lambda_1, \dots, \lambda_{10}, \beta)$ a popište systematický Gibbsův výběrový plán.
- Volte hodnoty hyperparametrů $\gamma = 0.01, \delta = 1, \alpha = 1.802$ a implementujte Gibbsův výběrový plán z b). Na základě simulace z GVP spočítejte jádrové odhady aposteriorních marginálních rozdělení pro parametry λ_i , aposteriorní střední hodnoty a 90%ní intervaly kredibility.
- Ukažte, že implementovaný algoritmus je stejnoměrně ergodický.
Návod: předpokládejme, že Gibbsův výběrový plán nejdříve aktualizuje postupně hodnoty λ_i a pak hodnotu β . Rozdělení aktualizované hodnoty $\beta = \beta_{(1)}$ po aktualizaci všech složek Gibbsovým výběrovým plánem závisí na předchozí hodnotě vektoru parametrů $(\lambda_1, \dots, \lambda_{10}, \beta)$ pouze skrze $\beta = \beta_{(0)}$. Označme $f(\beta_{(1)}|\beta_{(0)})$ hustotu podmíněného rozdělení $\beta_{(1)}$ při daném $\beta_{(0)}$. Stačí ukázat, že

$$h(\beta_{(1)}) = \inf_{\beta_{(0)}} f(\beta_{(1)}|\beta_{(0)}),$$

je kladná pro všechny kladné hodnoty $\beta_{(1)}$. Potom je totiž možné volit jako míru ν pro minorizační podmínku s $m = 2$ míru s hustotou úměrnou funkci

$$\int f_{\beta|\lambda}(\beta|\lambda) f_{\lambda|\beta}(\lambda|u) h(u) du,$$

kde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{10})$ (vysvětlete).

Abyste ukázali, že $h(\beta_{(1)})$ je kladné, musíte vyjádřit $f(\beta_{(1)}|\beta_{(0)})$ (jako integrál vzhledem k λ) a odhadnout ho zespoda kladnou funkcí nezávislou na $\beta_{(0)}$.

3. Straussův proces (p. Jurčo)

Straussův proces na množině E je konečný bodový proces s hustotou $p(x) \propto \beta^{x(E)} \gamma^{S(x)}$ vzhledem ke standardnímu Poissonovu procesu. Symbol $S(x)$ značí počet dvojic bodů realizace x , jejichž vzdálenost je menší než R .

Pro simulaci použijeme Metropolisův-Hastingsův algoritmus zrození, zániku a migrace. Necht' $0 \leq q < 1$ a necht' současný stav algoritmu je $x = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. S pravděpodobností q navrhneme migraci jednoho bodu: generujeme i z $R(\{1, \dots, n\})$, poté ξ z hustoty $q_i(x, \cdot)$ a návrh nového stavu y vznikne z x záměnou bodu ξ_i za bod ξ . Pravděpodobnost přijetí je $\min(1, h(x, \xi))$, kde

$$h(x, \xi) = \frac{p((x \setminus \{\xi_i\}) \cup \xi) q_i(y, \xi_i)}{p(x) q_i(x, \xi)}.$$

S pravděpodobností $1 - q$ naopak provedeme krok z Metropolisova-Hastingsova algoritmu zrození a zániku (viz přednáška).

Úkoly:

- Proč má řetězec generovaný výše popsaným algoritmem to správné stacionární rozdělení?
- Jaké jsou ergodické vlastnosti generovaného řetězce? Svá tvrzení dokažte.
- Implementujte Metropolisův-Hastingsův algoritmus zrození, zániku a migrace pro simulaci Straussova procesu na $E = [0, 1]^2$. Volte $q = 1/3$, $q_i(x, \cdot) = \frac{1}{\Lambda(E)}$, a parametry zrození a zániku stejně jako na přednášce.
- Proveďte simulace pro několik voleb parametrů $R > 0, 0 \leq \gamma < 1$ a $\beta > 0$. Komentujte empirické chování řetězce (jako sledovanou jednorozměrnou funkci výstupů lze použít $x(E)$ nebo i $u(x)$). Odhadněte $\mathbb{E}x(E)$ a také určete s jakou přesností jste toto číslo odhadli.

Součástí řešení by měly být i příklady realizace bodového procesu pro některé volby parametrů.

Pozn.: Jedná se o proces s odpudivými interakcemi mezi body.

4. Saturační proces (p. Samek)

Bodový proces se nazývá saturační proces, jestliže má vzhledem k standardnímu Poissonovu procesu hustotu

$$p(x) \propto \beta^{x(E)} \gamma^{u(x)},$$

kde

$$u(x) = \sum_{\xi \in x} \min(c, m_\xi(x))$$

a

$$m_\xi(x) = \sum_{\eta \in x, \eta \neq \xi} \mathbf{1}_{[\|\xi - \eta\| \leq R]}.$$

Dá se ukázat, že saturační proces je lokálně stabilní pro všechna $\beta > 0, \gamma \geq 0, c \in \mathbb{N}_0$ a $R > 0$.

Úkoly:

- Navrhněte Metropolisův-Hastingsův algoritmus zrození, zániku a migrace pro simulaci saturačního procesu na $E = [0, 1]^2$ (použijte návod z příkladu 3).
- Proč má řetězec generovaný výše popsaným algoritmem to správné stacionární rozdělení?

- c) Jaké jsou ergodické vlastnosti generovaného řetězce? Svá tvrzení dokažte.
- d) Implementujte Metropolisův-Hastingsův algoritmus zrození, zániku a migrace pro simulaci saturačního procesu na $E = [0, 1]^2$. Volte $q = 1/3$, $q_i(x, \cdot) = \frac{1}{\Lambda(E)}$, a parametry zrození a zániku stejně jako na přednášce.
- e) Proveďte simulace pro několik voleb parametrů $R > 0$, $\gamma \geq 0$, $c \in \mathbb{N}_0$ a $\beta > 0$. Komentujte empirické chování řetězce (jako sledovanou jednorozměrnou funkci výstupů lze použít $x(E)$ nebo i $u(x)$). Odhadněte $\mathbb{E}x(E)$ a také určete s jakou přesností jste toto číslo odhadli.

Součástí řešení by měly být i příklady realizace bodového procesu pro některé volby parametrů.

Pozn.: Pro $\gamma > 1$ se jedná o model shlukování bodů, pro $\gamma < 1$ se body odpuzují. Příklad $\gamma = 1$ odpovídá Poissonovu procesu (úplná nezávislost).

5. Proces s plošnou interakcí (sl. Koňasová)

Bodový proces se nazývá proces s plošnou interakcí (area-interaction process, Widom-Rowlinson penetrable spheres model), jestliže má vzhledem ke standardnímu Poissonovu procesu hustotu

$$p(x) \propto \beta^{x(E)} \gamma^{-|U_{x,R}|},$$

kde

$$U_{x,R} = \bigcup_{\xi \in x} B(\xi, R),$$

$B(\xi, R) = \{\eta : \|\xi - \eta\| \leq R\}$ je koule se středem v bodě ξ a poloměrem R a $|\cdot|$ značí plochu.

Dá se ukázat, že proces je lokálně stabilní pro všechny volby $\gamma > 0$. Proces je Markovský vzhledem k relaci sousedství, kdy sousedy jsou body vzájemně vzdálené nejvýše $2R$. Podmíněná hustota je rovna:

$$\lambda(x, \xi) = \beta \gamma^{-|B(\xi, R) \setminus \bigcup_{\eta \in x: \|\eta - \xi\| \leq 2R} B(\eta, R)|}.$$

Úkoly:

- a) Navrhnete Metropolisův-Hastingsův algoritmus zrození, zániku a migrace pro simulaci procesu s plošnou interakcí na $E = [0, 1]^2$ (použijte návod z příkladu 3). Pro vlastní implementaci a počítání ploch v sjednocených koulích může být vhodné diskretizovat okno E .
- b) Proč má řetězec generovaný výše popsaným algoritmem to správné stacionární rozdělení?
- c) Jaké jsou ergodické vlastnosti generovaného řetězce? Svá tvrzení dokažte.
- d) Implementujte Metropolisův-Hastingsův algoritmus zrození, zániku a migrace pro simulaci procesu s plošnou interakcí na $E = [0, 1]^2$. Volte $q = 1/3$, $q_i(x, \cdot) = \frac{1}{\Lambda(E)}$, a parametry zrození a zániku stejně jako na přednášce.
- e) Proveďte simulace pro několik voleb parametrů $R > 0$, $\gamma > 0$, a $\beta > 0$. Komentujte empirické chování řetězce (jako sledovanou jednorozměrnou funkci výstupů lze použít $x(E)$ nebo i $|U_{x,R}|$). Odhadněte $\mathbb{E}|U_{x,R}|$ a také určete s jakou přesností jste toto číslo odhadli.
- f) Projeví se použití migračního kroku významně na rychlosti mixingů, nebo by MH algoritmus zrození a zániku dle přednášky fungoval stejně dobře?

Součástí řešení by měly být i příklady realizace bodového procesu pro některé volby parametrů.

Pozn.: Pro $\gamma \geq 1$ se jedná o model shlukování bodů, pro $0 < \gamma \leq 1$ se body odpuzují. $\gamma = 1$ odpovídá Poissonovu procesu.

6. Proces s plošnou interakcí - perfektní simulace (p. Seitl)

Pro případ $\gamma > 1$ (tedy model pro shlukování) je hustota procesu s plošnou interakcí $\propto \gamma^{-|U_{x,R}|}$ proporcí hustotě nezávislého Poissonova procesu s vhodnou intenzitou, který nemá žádné body ve vzdálenosti R od našeho bodového vzoru. To lze využít k definici algoritmu pro simulování z procesu s plošnou interakcí pomocí simulování značkováného Poissonova procesu se dvěma komponentami takového, že body z různých komponent nejsou k sobě blíže než R .

Přesněji: buď (X, Y) dvousložkový bodový proces se sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \alpha \beta_1^{n(x)} \beta_2^{n(y)} I(\|x - y\| > R), \quad (1)$$

vzhledem k dvousložkovému Poissonovu procesu s nezávislými složkami s jednotkovou intenzitou. Zde α je normovací konstanta a $\|x - y\| = \min\{\|\xi - \eta\|, \xi \in x, \eta \in y\}$. Předpokládejme, že bodový proces je definován na jednotkovém čtverci $E = [0, 1]^2$, ovšem s periodickými okrajovými podmínkami (tedy náš čtverec je vlastně torus). Potom je podmíněné rozdělení komponenty X při daném Y rozdělení homogenního Poissonova procesu na $E \setminus U_{Y,R}$ s intenzitou rovnou β_1 . Marginální rozdělení komponenty X má vzhledem k Poissonovu procesu s jednotkovou intenzitou na E hustotu

$$f_X(x) = \alpha \beta_1^{n(x)} \exp(\beta_2 |E \setminus U_{x,R}| - |E|) = \alpha_1 \beta_1^{n(x)} (e^{\beta_2})^{-|U_{x,R}|}, \quad (2)$$

kde $\alpha_1 = \alpha e^{-(1-\beta_2)|E|}$. Tedy X je proces s plošnou interakcí s parametry $\beta = \beta_1, \gamma = e^{\beta_2}$ a pro simulování z tohoto procesu lze využít simulace z dvousložkového Poissonova procesu s hustotou (1).

Zaveďme uspořádání na konfiguracích $(x, y) \in N_E \times N_E$: $(x, y) \leq (x', y')$ pokud $x \subseteq x'$ a $y \supseteq y'$. Pak (x, y) pro které $y = \emptyset$ a $E \subseteq U_x$ je quazimaximální stav a (x, y) s $x = \emptyset$ a $E \subseteq U_y$ je quaziminimální stav.

Algoritmus perfektní simulace vypadá takto: pro $i = 0, -1, -2, \dots$ buďte $Z_{i,x}$ a $Z_{i,y}$ nezávislé Poissonovy bodové procesy na E s intenzitami β_1 a β_2 . Buď k_1, k_2, \dots rostoucí posloupnost kladných čísel a $(x, y)_{min}$ nějaká pevná quaziminimální konfigurace a $(x, y)_{max}$ nějaká pevná quazimaximální konfigurace. Pro $i = 1, 2, \dots$ generujeme dva Markovské řetězce podle Gibbsova výběrového plánu. Začínáme s

$$({}^i X_{-k_i}, {}^i Y_{-k_i}) = (x, y)_{min}, \quad ({}^i X'_{-k_i}, {}^i Y'_{-k_i}) = (x, y)_{max},$$

a pro $j = 1, \dots, k_i$

$$\begin{aligned} {}^i X_{j-k_i} &= Z_{j-k_i, x} \setminus U_{{}^i Y_{j-1-k_i}}, & {}^i Y_{j-k_i} &= Z_{j-k_i, y} \setminus U_{{}^i X_{j-1-k_i}}, \\ {}^i X'_{j-k_i} &= Z_{j-k_i, x} \setminus U_{{}^i Y'_{j-1-k_i}}, & {}^i Y'_{j-k_i} &= Z_{j-k_i, y} \setminus U_{{}^i X'_{j-1-k_i}}. \end{aligned}$$

Algoritmus zastavíme, když dojde ke koalescenci $({}^i X_0, {}^i Y_0) = ({}^i X'_0, {}^i Y'_0)$ a $({}^i X_0, {}^i Y_0)$ je potom výstupem našeho algoritmu perfektní simulace.

Úkoly:

- Odvoďte vzorec (2).
- Popište Gibbsův výběrový plán pro simulaci z dvousložkového Poissonova procesu s hustotou (1).
- Použijte výše popsaný algoritmus perfektní simulace pro simulování z procesu s plošnou interakcí pro několik různých voleb $\gamma > 1, \beta > 0$ a $R > 0$. Vysvětlete, jaké byly odpovídající použité parametry β_1 a β_2 a zvolte vhodnou posloupnost k_1, k_2, \dots . Součástí řešení by měly být také získané realizace bodového procesu (uveďte také, jaká byla nutná hodnota i času, pro který už došlo ke koalescenci).

7. GARCH model (p. Vávra)

Uvažujme časovou řadu

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

kde $\epsilon_t | Y_1, \dots, Y_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ a

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.$$

Parametry α_0, α_1 a β_1 jsou nezáporné (aby rozptyl σ_t^2 nebyl záporný) a $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ (podmínka stacionarity). Jedná se o tzv. GARCH(1,1) model.

Označme $\theta = (a_0, a_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ vektor neznámých parametrů. Pro data $y = (y_1, \dots, y_T)$ má věrohodnost tvar

$$f(y | \theta) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left\{-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right\} \quad (*)$$

Model se často používá ve finanční matematice k modelování logaritmických výnosů.

Předpokládejme, že ze zkušenosti s podobnými finančními daty můžeme uvažovat toto apriorní rozdělení: $a_0 \sim N(0, 3)$, $a_1 \sim N(0, 3)$, $\alpha_0 \sim LN(-12.3, 5)$, $\alpha_1 \sim LN(-2, 5)$ a $\beta_1 \sim LN(-0.2, 5)$, kde LN značí lognormální rozdělení (tj. $\log \alpha_0 \sim N(-12.3, 5)$) a všechny parametry jsou apriorně nezávislé.

Ukazuje se, že tato volba apriorního rozdělení vede na komplikovaná plně podmíněná rozdělení, proto nemůžeme použít Gibbsův výběrový plán. Zvolíme tedy Metropolisův algoritmus symetrické náhodné procházky.

Jako data y použijeme data s německými akciovými indexy DAX, která jsou součástí R. Načtení a potřebná transformace dat se provede následovně:

```
data(EuStockMarkets)
dax <- diff(log(EuStockMarkets[,1]))
```

Úkoly:

- a) Ověřte, že platí vztah (*).
- b) Implementujte Metropolisův algoritmus pro simulaci z aposteriorního rozdělení. Jako návrhové přírůstkové rozděleníberte mnohorozměrné normální. Protože parametry v definici rozptylu $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ jsou obvykle silně korelované, lze v rámci zvětšení efektivity algoritmu uvažovat korelace v návrhové hustotě. Proveďte několik průzkumných běhů řetězce (z různých počátečních stavů a s diagonální varianční maticí návrhové hustoty) a na jejich základě najděte empirické korelační koeficienty mezi příslušnými parametry. Pro samotný výsledný algoritmus pak použijte návrhy generované v nezávislých blocích: a_0, a_1 z jednorozměrného normálního a $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ z trojrozměrného lognormálního s odhadnutými korelačními koeficienty. Volte vhodně rozptyly návrhového rozdělení tak, aby celková průměrná pravděpodobnost přijetí byla kolem 25%.
- c) Pomocí několika průběhů řetězce z různých počátečních hodnot volte vhodný burn-in. Na základě autokorelačních koeficientů pro marginální řetězce vyberte vhodný krok pro podposloupnost řetězce a tu použijte k vykreslení jádrových odhadů aposteriorních hustot parametrů α_0, α_1 a β_1 . Výsledky porovnejte s maximálně věrohodnými odhady, které v R získáte pomocí funkce `garch` v knihovně `tseries`.

Pozn.: Místo s parametry $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ bude jednodušší pracovat s jejich logaritmy.