

Příklady ke cvičení z MCMC – MCMC algoritmy II

Příklad 1: Uvažujme lineární model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim N(0, \tau^{-1}), \quad i = 1, \dots, n,$$

kde $\beta = (\beta_0, \beta_1)^T \sim N_2(\mu, \Sigma)$ a $\tau \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ jsou nezávislé. Předpokládejme, že podmíněně při β a τ jsou Y_i nezávislé. Chceme generovat vzorek z aposteriorní hustoty $\pi(\beta, \tau | y_1, \dots, y_n)$. Definujte Metropolisův-Hastingsův algoritmus.

Příklad 2: Buď $s = (s_1, s_2)^T$ a uvažujme model s normálně rozděleným vektorem chyb ϵ_s

$$Y_s = \beta_0 + \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \epsilon_s, \quad \epsilon_s \sim N(0, \sigma^2),$$

kde

$$\text{cov}(\epsilon_s, \epsilon_{s^*}) = \sigma^2 \exp\{-\kappa((s_1 - s_1^*)^2 + (s_2 - s_2^*)^2)\}, \quad \kappa > 0,$$

a apriorní rozdělení je $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)^T \sim N_3(\mu, \Sigma)$, $\sigma^2 \sim \Gamma(a_\sigma, b_\sigma)$ a $\kappa \sim \Gamma(a_\kappa, b_\kappa)$, kde β , σ^2 a κ jsou nezávislé. Předpokládejme, že máme k dispozici pozorování $y = (y_{s(1)}, \dots, y_{s(n)})^T$. Chceme generovat z aposteriorního rozdělení s hustotou $\pi(\beta, \sigma^2, \kappa | y)$. Definujte vhodný MCMC algoritmus. Jak byste generovali z $Y_{s(s+1)} | Y = y$?

Příklad 3: Uvažujme AR(1) model:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{N},$$

kde $-1 < \phi < 1$ a ϵ_t je reálný bílý šum s rozptylem σ^2 , tj. $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ nezávislé. Předpokládejme, že apriorní rozdělení je $\phi \sim R(-1, 1)$ a $\tau = \sigma^{-2} \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ a máme k dispozici pozorování $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Vytvořte MCMC algoritmus pro generování z aposteriorní hustoty $\pi(\phi, \tau | x)$. Jak byste generovali z $X_{n+1} | X = x$?

Příklad 4, P1: Chcete generovat vzorek z $N(0, 1)$.

- definujte Metropolisův algoritmus s náhodnou procházkou a ověřte, že když zvětšujeme rozptyl návrhového rozdělení, pravděpodobnost přijetí návrhu klesá,
- definujte Metropolisův-Hastingsův algoritmus s nezávislými kroky (nezávislým výběrem).

Napište funkci, která bude generovat Markovský řetězec s cílovým rozdělením s hustotou $N(0, 1)$. Návrhovou hustotu volte:

- normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ^2 .
- Laplaceovo rozdělení s parametrem a .

Zkuste také použít algoritmus symetrické náhodné procházky, opět s různými volbami návrhového rozdělení (rovnoměrné, normální) a různými startovacími hodnotami.

Pozorujte, jaký je vliv rozptylu návrhového rozdělení na průběh vygenerovaného řetězce a pravděpodobnost přijetí.