Příklady ke cvičení z MCMC – MCMC algoritmy I

Příklad 1: Buď $X_i \sim Po(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$, nezávislé. Předpokládejme, že λ_i jsou apriorně nezávislé a navíc

$$\lambda_i \,|\, \theta_i \sim \Gamma(\alpha, \theta_i), \quad \theta_i \sim \Gamma(a, b), \quad i = 1, \ldots, n$$

Definujte Gibbsův výběrový plán pro simulaci z $\pi(\lambda_1, \theta_1, \ldots, \lambda_n, \theta_n \,|\, x_1, \ldots x_n)$. Jak byste simulovali přímo z aposteriorního rozdělení?

Příklad 2: Uvažujme lineární model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim N(0, \tau^{-1}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

kde $\beta = (\beta_0, \beta_1)^T \sim N_2(\mu, \Sigma)$ a $\tau \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ jsou nezávislé. Předpokládejme, že podmíněně při β a τ jsou Y_i nezávislé. Chceme generovat vzorek z aposteriorní hustoty $\pi(\beta, \tau | y_1, \ldots, y_n)$. Definujte Gibbsův výběrový plán.

Příklad 3, P1: (Casella, George, 1992)
Nebezpečí bezstarostného používání Gibbsova výběrového plánu spočívá v tom, že plně podmíněná rozdělení nemusí určovat sdružené rozdělení. Nechť $X|Y = y \sim Exp(y)$ a $Y|X = x \sim Exp(x)$. Ukažte, že tato podmíněná rozdělení neodpovídají žádnému pravděpodobnostnímu rozdělení, tedy neexistuje vlastní sdružená hustota (X, Y).

Implementujte Gibbsův algoritmus s výše uvedenými podmíněnými rozděleními – jak se chová výstup? Je na něm něco podezřelého? A jakému "aposteriornímu"rozdělení výstup odpovídá?

Příklad P2: (Carlin, Gelfand, Smith, 1992)
Uvažujme zjednodušení modelu z úlohy 8 z předchozího listu. Nechť $X_i \sim Po(\theta)$, pro $i = 1, \ldots, k$, a $X_i \sim Po(\lambda)$ pro $i = k + 1, \ldots, n$. Apriorní rozdělení pro θ, λ a k jsou nezávislá: $\theta \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, $\lambda \sim \Gamma(\gamma, \delta)$ a $k \sim R(\{1, \ldots, n\})$, kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, n$ jsou známé konstanty. V tomto případě lze analyticky vyjádřit marginální aposteriorní rozdělení.

Pro data s důlními katastrofami (n = 112) implementujte Gibbsův výběrový plán. Hyperparametry zvolte $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.001$. Proveďte 5100 iterací a příslušnou aproximaci aposteriorního rozdělení parametrů λ, θ, a k (založenou na posledních 5 000 iteracích) graficky porovnejte se skutečným aposteriorním rozdělením (pro každý parametr zvlášť).