

Příklady ke cvičení z MCMC – Bayesova věta, konjugovanost, podmíněná konjugovanost

Připomeňme, že Bayesova věta pro podmíněné hustoty má tvar

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int f(x|\theta)\pi(\theta)\nu(d\theta)},$$

kde $\pi(\theta)$ se nazývá apriorní hustota, $f(\theta|x)$ je věrohodnost a $\pi(\theta|x)$ je aposteriorní hustota.

Příklad 1: Ukažte, že aposteriorní rozdělení $\pi(\theta|x, y)$ parametru θ nezávisí na pořadí, ve kterém byly x a y zpracovány, tj. když použijeme aposteriorní hustotu $\pi(\theta|x)$ jako apriorní pro pozorování y nebo když použijeme aposteriorní hustotu $\pi(\theta|y)$ jako apriorní pro pozorování x , dostaneme vždy stejné aposteriorní rozdělení $\pi(\theta|x, y)$.

Příklad 2: Nechtě $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma_0^2)$, kde rozptyl $\sigma_0^2 > 0$ je známá konstanta. Jako apriorní rozdělení pro parametr μ zvolme $N(a, b^2)$, kde hyperparametry a a b jsou známé. Určete aposteriorní rozdělení μ . Jak by vypadalo aposteriorní rozdělení pro neurčité apriorní rozdělení ($b^2 \rightarrow \infty$)?

Příklad 3: Nechtě $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma_0^2)$, kde rozptyl $\sigma_0^2 > 0$ je známá konstanta. Jako apriorní rozdělení pro parametr μ zvolme exponenciální rozdělení se střední hodnotou 1. Určete aposteriorní rozdělení μ .

Příklad 4: Nechtě $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z binomického rozdělení s parametry (m, θ) , kde m je dané a apriorní rozdělení θ je beta rozdělení s pevnými parametry (a, b) . Určete aposteriorní rozdělení θ .

Příklad 5: Mějme pozorování z Poissonova rozdělení s parametrem λ . Ukažte, že rodina Γ -rozdělení je konjugovaná pro tento model.

Příklad 6: Nechtě $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$. Označme $\tau = \sigma^{-2}$. Určete aposteriorní rozdělení (μ, τ) , pokud

(a) μ a τ jsou apriorně nezávislé, $\mu \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ a $\tau \sim \Gamma(\alpha_0, \lambda_0)$,

(b) apriorní rozdělení je normální-gamma $NG(\mu_0, \sigma_0^2, \alpha_0, \lambda_0)$, tj. $\mu|\tau \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{\tau})$ a $\tau \sim \Gamma(\alpha_0, \lambda_0)$, kde $\mu_0, \sigma_0^2, \alpha_0$, a λ_0 jsou známé hyperparametry. Rozhodněte, kdy se jedná o konjugovaný systém.

Určete podmíněné aposteriorní hustoty $\pi(\mu|\tau, x)$ a $\pi(\tau|\mu, x)$. Rozhodněte, ve kterém případě nastává podmíněná konjugovanost.

Příklad 7: Mějme model normální lineární regrese

$$Y|\beta, \tau \sim N_n(X\beta, \tau^{-1}I_n), \quad \beta \in \mathbb{R}^d, \tau > 0,$$

kde X je matice vysvětlujících proměnných řádu $n \times d$ a je dáno apriorní rozdělení pro parametry (β, τ) :

(a) β a τ jsou apriorně nezávislé, $\beta \sim N_d(b_0, B_0)$ a $\tau \sim \Gamma(n_0/2, n_0\sigma_0^2/2)$,

(b) mnohorozměrné normální-gamma rozdělení $NG_d(b_0, B_0, n_0/2, n_0\sigma_0^2/2)$:

$$\beta|\tau \sim N_d(b_0, \tau^{-1}B_0), \quad \tau \sim \Gamma(n_0/2, n_0\sigma_0^2/2).$$

Ukažte, že β i τ jsou podmíněně konjugované.

V případě (b) ukažte, že se dokonce jedná o konjugovaný systém rozdělení. Konkrétně

$$\beta|y, \tau \sim N_d(b_1, \tau^{-1}B_1), \quad \tau|y \sim \Gamma(n_1/2, n_1\sigma_1^2/2),$$

kde $n_1 = n + n_0$, $n_1\sigma_1^2 = n_0\sigma_0^2 + (y - Xb_1)^T y + (b_0 - b_1)^T B_0^{-1}b_0$, $b_1 = B_1(B_0^{-1}b_0 + X^T y)$ a $B_1^{-1} = B_0^{-1} + X^T X$.

Návod: Využijte toho, že

$$(y - X\beta)^T (y - X\beta) = (\beta - \hat{\beta})^T X^T X (\beta - \hat{\beta}) + S_e,$$

kde $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$ je maximálně věrohodný odhad parametru β a $S_e = (y - X\hat{\beta})^T (y - X\hat{\beta})$.

Příklad 8: (Carlin, Louis, 2000) Pro data udávající roční počty důlních neštěstí ve Velké Británii uvažujeme následující hierarchický model:

$$\begin{aligned} X_i &\sim Po(\theta), \quad i = 1, \dots, k, \\ X_i &\sim Po(\lambda), \quad i = k + 1, \dots, n, \\ \theta &\sim \Gamma(a_1, b_1), \\ \lambda &\sim \Gamma(a_2, b_2), \\ k &\sim R(\{1, \dots, n\}), \\ b_1 &\sim \Gamma(c_1, d_1), \\ b_2 &\sim \Gamma(c_2, d_2), \end{aligned}$$

kde $n, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ jsou známé konstanty, θ, λ a k jsou nezávislé a b_1 a b_2 jsou nezávislé. Popište aposteriorní rozdělení pomocí plných podmíněných rozdělení, tj. určete rozdělení $\theta|X, \lambda, b_1, b_2, k$; $\lambda|X, \theta, b_1, b_2, k$; $b_1|X, \theta, \lambda, b_2, k$; $b_2|X, \theta, \lambda, b_1, k$; $k|X, \theta, \lambda, b_1, b_2$, kde $X = (X_1, \dots, X_n)$. Které parametry jsou podmíněně konjugované?