Stacionární rozdělení Markovova řetězce a klasifikace

Definice 1 *Buď $\{X_n\}$ homogenní Markovův řetězec s množinou stavů S a π buď pravděpodobnostní rozdělení na S. π se nazývá stacionární rozdělení Markovova řetězce $\{X_n\}$ pokud platí $\pi^T = \pi^T P$.*

V Markovově řetězci s konečně mnoha stavy vždy existuje stacionární rozdělení. Je jednoznačné, právě když jsou všechny trvalé stavy vzájemně dosažitelné. Je-li π stacionární rozdělení a i přechodný stav, pak $\pi_i = 0$.

Příklad 1: Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

a najděte jeho stacionární rozdělení (pokud existuje).

Věta 1 *Buď $\{X_n\}$ nerozložitelný homogenní Markovův řetězec s množinou stavů $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Potom jsou všechny jeho stavy trvalé, právě když jediné řešení soustavy rovnic*

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots$$

v intervalu $[0, 1]$ je triviální řešení $x_i = 0, i = 1, 2, \dots$. Všechny stavy jsou přechodné, právě když má soustava v $[0, 1]$ i nějaké netriviální řešení.

Věta 2 *Buď $\{X_n\}$ nerozložitelný homogenní Markovův řetězec. Všechny jeho stavy jsou trvalé nenulové, právě když existuje stacionární rozdělení π. V tom případě navíc platí*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I_{[X_k=j]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = j) = \frac{1}{\mathbb{E}\tau_j(1)}, \qquad \mathbb{P} - s.j.$$

Je-li řetězec navíc aperiodický, pak existují limity $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_j(X_n = j) = \pi_j, i \in S$.

Je-li tedy $\{X_n\}$ nerozložitelný homogenní Markovův řetězec se spočetnou množinou stavů, potom lze zkusit spočítat jeho stacionární rozdělení vyřešením soustavy $\pi^T P = \pi^T$ s další podmínkou $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ (má to být pravděpodobnostní rozdělení). Pokud takové rozdělení najdu, má řetězec všechny stavy trvalé nenulové. Ukážu-li ale, že stacionární rozdělení neexistuje, nevím, jestli jsou stavy trvalé nulové nebo přechodné. K tomu musím vyřešit redukovanou soustavu rovnic z Věty 1. Pokud existuje nějaké netriviální řešení, jsou všechny stavy přechodné. Pokud existuje jen triviální řešení, jsou všechny stavy trvalé nulové.

Příklad 2: Uvažujme posloupnost bernoulliovských pokusů. Pravděpodobnost zdaru je $p \in (0, 1)$ a pravděpodobnost nezdaru $q = 1 - p$. Definujme X_n jako délku série zdarů, které jsme dosáhli v n-tém pokuse (pokud skončil n-tý pokus nezdarem, je $X_n = 0$). Ukažte, že posloupnost $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ je homogenní Markovův řetězec, najděte matici pravděpodobností přechodu (i vyšších řádů), klasifikujte stavy řetězce a spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje).

Příklad 3: Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu a najděte stacionární rozdělení (pokud existuje).

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1\cdot 2} & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Příklad 4: Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Příklad 5: Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu a najděte stacionární rozdělení (pokud existuje).

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

Příklad 6: Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \dots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

kde $q_i \in (0, 1)$. Také najděte jeho stacionární rozdělení (pokud existuje).

Příklad 7: Buď $\{X_n\}$ Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} q_0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & 0 & 0 & p_1 & 0 & \dots \\ q_2 & 0 & 0 & 0 & p_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

kde $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$, $1 > p_i > 0$. Klasifikujte stavy řetězce a najděte stacionární rozdělení, pokud existuje.

Příklad 8: Leze slimák po nekonečně vysokém stromě, za každou hodinu s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ vyleze nahoru o jeden centimetr a s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ o jeden centimetr dolů sklouzne. Pokud je na zemi, popoleze o jeden centimetr nahoru s pravděpodobností 1. Označme X_n výšku (v centimetrech), ve které se slimák nachází po n hodinách.
a) Určete matici pravděpodobností přechodu.
b) Klasifikujte stavy řetězce.
c) Předpokládejte, že na počátku je slimák na zemi, a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po třech hodinách.
d) Spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje).

Příklad 9: Aleš a Barbora hrají sérii šachových zápasů. Předpokládejme, že každá partie skončí s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ výhrou Aleše, s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ remízou, a s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ výhrou Barbory. Za výhru se získává jeden bod, za remízu půl bodu.Označme X_n absolutní hodnotu rozdílu získaných bodů obou hráčů po n partiích. Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce $\{X_n\}_{n \in \mathbf{N}}$. Klasifikujte stavy a určete stacionární rozdělení (pokud existuje).
Označme nyní Y_n počet bodů, o které vede vedoucí hráč (ano, $X_n = |Y_n|$). Je $\{Y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ také Markovův řetězec?