Klasifikace stavů Markovova řetězce

Definice 1 *Označme $\tau_j(1) = \inf\{n > 0 : X_n = j\}$ čas prvního návratu do stavu j a*

$$f_{i,j}^{(0)} = 0, \qquad f_{i,j}^{(n)} = P_i(\tau_j(1) = n), \qquad n \geq 1$$

pravděpodobnostní rozdělení doby prvního návratu. Dále značíme

$$f_{i,j} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)} = P_i(\tau_j(1) < \infty).$$

Definice 2 *Stav j Markovova řetězce se nazývá trvalý, jestliže řetězec, který vychází ze stavu j, se do j vrátí s pravděpodobností 1 po konečně mnoha krocích, t.j.*

$$P_j(\tau_j(1) < \infty) = 1$$

Stav j se nazývá přechodný, jestliže řetězec, který vychází ze stavu j, se s kladnou pravděpodobností do j nikdy nevrátí, t.j.

$$P_j(\tau_j(1) = \infty) > 0.$$

Trvalý stav se nazývá nenulový, jestliže $E_j\tau_j(1) < \infty$, a nulový pokud $E_j\tau_j(1) = \infty$.

Příklad 1: Mějme neomezenou zásobu kuliček a k přihrádek. V každém kroku jednu kuličku náhodně vložíme do jedné z přihrádek. Nechť X_n označuje počet obsazených přihrádek v čase n. Klasifikujte stavy Markovova řetězce $\{X_n\}$.

Věta 1 *Stav $i \in S$ je trvalý právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$. Trvalý stav i je nulový právě tehdy, když $p_{ii}^{\infty} \to 0$ pro $n \to \infty$.*

Definice 3 *Nechť d_j je největší společný dělitel čísel $n \geq 1$, pro které $p_{jj}^{(n)} > 0$. Je-li $d_j > 1$, říkáme, že stav je periodický s periodou d_j, je-li $d_j = 1$, říkáme, že stav j je neperiodický.*

Příklad 2: Nechť $\{X_n, n \in \}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s diskrétním rovnoměrným rozdělením na množině $\{-1, 0, 1\}$. Uvažujme posloupnost $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \in N_0$. Klasifikujte stavy Markovova řetězce $\{Y_n\}$.

Příklad 3: Uvažujme Markovský řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

to jest náhodnou procházku na trojúhelníku. Spočtěte P^n. Klasifikujte stavy řetězce.

Nápověda: Použijte Perronův vzorec - resp. jeho důsledek pro mocnění matic:
Buď A čtvercová matice s vlastními čísly $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ s násobnostmi $m_1, \ldots, m_k$. Pak platí

$$A^n = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(m_j - 1)!} \frac{d^{m_j - 1}}{d\lambda_j^{m_j - 1}} \left[\frac{adj(\lambda I - A)}{\psi_j(\lambda)} \lambda^n \right] \Bigg|_{\lambda = \lambda_j},$$

kde

$$\psi_j = \frac{det(\lambda I - A)}{(\lambda - \lambda_j)^{m_j}}.$$

Příklad 4: Buď dán Markovův řetězec se stavy $\{a, b\}$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Spočtěte P^n. Určete rozdělení časů prvního návratu do stavů a a b a spočtěte jejich střední hodnoty. Klasifikujte stavy řetězce.

Definice 4 *Řekneme, že stav j je dosažitelný ze stavu i (a budeme psát $i \to j$), jestliže existuje $n \in \mathbf{N}_0$ tak, že $p_{ij}^{(n)} > 0$. Jestliže $p_{ij}^{(n)} = 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}_0$, pak j není dosažitelný z i.*
Řetězec je nerozložitelný, pokud je každý jeho stav dosažitelný z každého jiného stavu.

Platí: (i) Pokud jsou stavy $i, j \in S$ vzájemně dosažitelné, pak jsou stejného typu.

(ii) Pokud $i \to j \not\to i$, pak je stav i přechodný.

(iii) V Markovově řetězci s konečnou množinou stavů neexistují stavy trvalé nulové a není možné, aby byly všechny stavy přechodné.

Definice 5 *Množina stavů C je uzavřená, pokud žádný stav mimo C není dosažitelný ze stavu v C - tj. $p_{ij}^{(n)} = 0$ pro všechny $i \in C, j \notin C, n \in \mathbf{N}$.*
Je-li jednobodová množina $\{j\}$ uzavřená, říkáme stavu j stav absorpční.

Příklad 5: Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6: Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7: Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud Markovův řetězec s konečně mnoha stavy obsahuje přechodné stavy, tak matici pravděpodobností přechodu můžeme přeuspořádat do tvaru

$$P = \begin{pmatrix} P^* & 0 \\ Q & R \end{pmatrix},$$

$P^* = \{p_{ij}, i, j \in T^c\}$, $Q = \{p_{ij}, i \in T, j \in T^c\}$ a $R = \{p_{ij}, i, j \in T\}$.

Pravděpodobnosti absorpce

Definice 6 *Označme $\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin T\}$ čas výstupu z množiny přechodných stavů T. Pravděpodobnosti absorpce značíme $u_{ij} = P_i(X_\tau = j)$, $i \in T, j \in T^c$.*

Platí

$$u_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in T} p_{ik} u_{kj}, \qquad i \in T, j \in T^c,$$

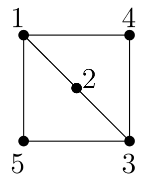
takže matici absorpce lze vyjádřit jako

$$U = (I - R)^{-1} Q = \sum_{n=0}^{\infty} R^n Q,$$

Matice $F = (I - R)^{-1}$ se nazývá fundamentální matice řetězce $\{X_n\}$.

Příklad 8: Najděte fundamentální matici řetězce z příkladu 5. Najděte pravděpodobnost, že řetězec, který vychází ze stavu 2, dříve nebo později skončí ve stavu 4.

Příklad 9: Uvažujme náhodnou procházku na grafu níže uvedeném, tedy nějaký objekt se pohybuje po grafu a posloupnost souřadnic vrcholů, které prochází je Markovský řetězec $\{X_n\}_{n \in \mathbf{N}}$. Pravidla pro postup jsou taková, že v každém časovém okamžiku se objekt nacházející se ve vrcholu v rozhodne rovnoměrně náhodně, nezávisle na předchozích pohybech mezi sousedy vrcholu v a přesune se do vybraného sousedního vrcholu. Navíc stavy (vrcholy) 5 a 4 jsou definovány jako absorbční, tedy $p_{4,4} = p_{5,5} = 1$. Sestavte matici pravděpodobností přechodu, určete její fundamentální matici a pravděpodobnost absorpce ve vrcholu 5, pokud vycházím z vrcholu 2 nebo z vrcholu 1.



Definice 7 *Buď $\{X_n\}$ Markovův řetězec s množinou stavů S a π buď pravděpodobnostní rozdělení na S. π se nazývá stacionární rozdělení Markovova řetězce $\{X_n\}$ pokud platí $\pi^T = \pi^T P$.*

Příklad 10: Mějme urnu a 5 koulí. V každém kroku budeme koule z urny odebírat nebo do urny přidávat podle následujícího schématu. Pokud je urna prázdná, naplníme ji všemi pěti koulemi. V opačném případě z urny odebereme s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ čtyři koule, s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ dvě koule a s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ žádnou kouli. Pokud bychom měli odebrat více koulí, než se právě v urně nachází, tak odebereme všechny koule, které v urně jsou. Nechť X_n značí počet koulí v urně po n krocích. Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$. Klasifikujte stavy řetězce a spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje). Určete matici pravděpodobností absorpce do trvalých stavů. Předpokládejte, že počáteční rozdělení je rovnoměrné (každý stav má stejnou pravděpodobnost) a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po prvním kroku.

Příklad 11: Klasifikujte stavy a spočtěte stacionární rozdělení Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$