Galtonův-Watsonův proces větvení

Uvažujme populaci jedinců, kteří dávají vznik jedincům stejného druhu. Každý jedinec žije přesně jednu jednotku času a na jejím konci z něj vznikne rodina k nových jedinců. Předpokládáme, že velikosti rodin jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny, a rozdělení počtu dětí v jedné rodině U je dáno vztahem $\mathbb{P}(U = k) = p_k$, $k \in \mathbf{N}_0$. Označme X_n počet všech jedinců v n-té generaci. Náhodnou posloupnost $\{X_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ nazýváme Galtonův-Watsonův proces větvení.

Předpokládáme, že na počátku (v nulté generaci) je jeden jedinec (tj. $X_0 = 1$). Potom počet jedinců v n-té generaci je dán jako

$$X_n = U_1 + \dots U_{X_{n-1}}.$$

Pro vytvořující funkci takové náhodné veličiny platí

$$P_{X_0}(s) = s, \quad P_{X_1}(s) = P_U(s), \quad P_{X_n}(s) = P_{X_{n-1}}\left(P_U(s)\right), \; n = 2, 3, \dots.$$

Označíme-li $\mathbb{E}U = \mu$, $VarU = \sigma^2$ platí

$$\mathbb{E}X_n = \mu^n, \quad VarX_n = \sigma^2\mu^{n-1}(1 + \mu + \dots + \mu^{n-1}).$$

Označme $e_n = \mathbb{P}(X_n = 0) = P_{X_n}(0)$ pravděpodobnost, že populace vymře do času n. Pak pravděpodobnost, že vůbec někdy vymře, je

$$e = \mathbb{P}\left(\bigcup_n [X_n = 0]\right) = \lim_{n\to\infty} e_n,$$

protože jevy $[X_n = 0]$ jsou neklesající. Vztah $P_{X_n}(s) = P_U(P_{X_{n1}}(s))$ pro $s = 0$ znamená $e_n = P_U(e_{n-1})$. Ze spojitosti P_U tak musí platit $e = P_U(e)$. Tato rovnice má vždycky řešení $e = 1$. Pro $p_0 = 1$ je hledaná pravděpodobnost právě $e = 1$, pro $p_0 = 0$ je to $e = 0$. Pro $0 < p_0 < 1$ platí následující tvrzení.

Věta 1 *Nechť v Galtonově-Watsonově modelu větvení je $0 < p_0 < 1$. Pokud $\mu \leq 1$, potom $e = 1$. Pokud $\mu > 1$, potom $e \in (0, 1)$ a je to jediné řešení $P_U(s) = s$ v intervalu $(0, 1)$.*

Příklad 1: Uvažujme model větvení s $p_0 = 1/5, p_1 = 1/5, p_2 = 3/5$ a $p_k = 0$ pro $k \geq 3$. Určete střední hodnotu a rozptyl počtu jedinců v n-té generaci. Spočtěte pravděpodobnost vymření populace. Určete rozdělení počtu jedinců ve druhé generaci.

Markovovy řetězce s diskrétním časem

Definice 1 *Posloupnost náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ s hodnotami v diskrétní množině S se nazývá Markovův řetězec s diskrétním časem a množinou stavů S, jestliže*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

pro všechna $n \in \mathbf{N}_0$ a všechna $i, j, i_{n-1}, \ldots, i_0 \in S$ taková, že $\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \ldots, X_0 = i_0) > 0$.

Podmíněné pravděpodobnosti $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}(n, n+1)$ se nazývají pravděpodobnosti přechodu ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$. Podobně $\mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = i) = p_{ij}(n, n+m)$ pro $m \in \mathbf{N}$ se nazývají pravděpodobnosti přechodu m-tého řádu. Jestliže $p_{ij}(n, n+m)$ nezávisí na časových okamžicích n a $n+m$, ale jen na jejich rozdílu m, říkáme, že příslušný Markovův řetězec je homogenní.

Příklad 2: Ověřte, že Galtonův-Watsonův proces větvení je homogenní Markovův řetězec. Jak vypadají pravděpodobnosti přechodu? Vyjádřete pravděpodobnosti přechodu ze stavů 0, 1 a 2 pro případ z příkladu 1.

Příklad 3: Nechť $\{X_n, n \in \}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s diskrétním rovnoměrným rozdělením na množině $\{-1, 0, 1\}$. Uvažujme posloupnost $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\},\ n \in N_0$. Ukažte, že se jedná o homogenní Markovův řetězec, určete matice pravděpodobností přechodu všech řádů.

Příklad 4: Nechť $\{X_n, n \in \}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s diskrétním rovnoměrným rozdělením na množině $\{-1, 0, 1\}$. Uvažujme posloupnost $Y_n = X_n + X_{n+1},\ n \in N_0$. Ukažte, že posloupnost $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ není Markovův řetězec.
Nápověda: Uvažujte trajektorie $(2; 0; 2)$ $(-2; 0; 2)$ posloupnosti $(X_0; X_1; X_2)$.

Příklad 5: Mějme neomezenou zásobu kuliček a k přihrádek. V každém kroku jednu kuličku náhodně vložíme do jedné z přihrádek. Nechť X_n označuje počet obsazených přihrádek v čase n. Ukažte, že $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ je homogenní Markovův řetězec a určete matici pravděpodobností přechodu.

Příklad 6: Nechť $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s diskrétním rovnoměrným rozdělením na množině $\{-1, 0, 1\}$. Pro čas t uvažujme náhodné veličiny: A_t čas, který uplynul od poslední pozorované nuly. a B_t, čas, který uplyne do nejbližší pozorované nuly. Jsou posloupnosti $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ Markovovy řetězce? Pokud ano, určete jejich matici pravděpodobností přechodu.