Vytvořující funkce čítací náhodné veličiny

Definice 1 *Nechť* $\{a_n\} = \{a_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ *je posloupnost reálných čísel. Jestliže mocninná řada* $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ *konverguje pro* $|s| < s_0$*, pro nějaké* $s_0 > 0$*, potom* $A(s)$ *nazveme vytvořující funkcí posloupnosti* $\{a_n\}$.

Ke každé řadě typu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existuje takové číslo $0 \leq R \leq \infty$, že pro $|s| < R$ tato řada konverguje a to absolutně; pro $|s| > R$ řada diverguje. Číslo R se nazývá poloměr konvergence a platí

$$R = \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}.$$

Definice 2 *Buď* X *nezáporná celočíselná náhodná (čítací) veličina s rozdělením* $\{p_n, n \in \mathbf{N}_0\}$*. Vytvořující funkci posloupnosti* $\{p_n\}$ *nazveme vytvořující funkcí náhodné veličiny* X*. Značíme* $P_X(s)$.

Platí $P_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n < 1$, přičemž $P_X(1) = 1$ tehdy a jen tehdy, když $P[X < \infty] = 1$. Poloměr konvergence je tedy nejméně 1.

Věta 1 *Pro momenty (vlastní) náhodné veličiny* X *platí*

$$\begin{aligned} EX &= P'_X(1) \\ \mu^{[k]} = EX(X-1)\dots(X-k+1) &= P_X^{(k)}(1), \qquad k \in \mathbf{N} \\ varX &= P''_X(1) + P'_X(1) - (P'_X(1))^2 \qquad (\textit{je-li } EX < \infty). \end{aligned}$$

Příklad 1: Spočtěte vytvořující funkci Poissonova rozdělení a určete její poloměr konvergence. Z vytvořující funkce spočtěte střední hodnotu a rozptyl.

Příklad 2: Spočtěte vytvořující funkci geometrického rozdělení a určete její poloměr konvergence. Z vytvořující funkce spočtěte střední hodnotu a rozptyl.

Příklad 3: Vyjádřete $P_{2X}(s)$ pomocí $P_X(s)$. Vyjádřete $P_{X+1}(s)$ pomocí $P_X(s)$.

Příklad 4: Mějme posloupnost n bernoulliovských pokusů. Najděte pravděpodobnost a_n, že počet úspěšných pokusů bude sudé číslo.

Příklad 5: Uvažujme posloupnost bernoulliovských pokusů. Najděte pravděpodobnost a_n, že dvojice $(zdar, nezdar)$, se poprvé objeví v pokuse n-tém a $(n+1)$-ním.

Příklad 6: Najděte příklad rozdělení čítací náhodné veličiny X, jejíž vytvořující funkce $P_X(s)$ má poloměr konvergence $R = 1$.

Konvoluce a součty čítacích náhodných veličin

Definice 3 *Buďte* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *posloupnosti. Posloupnost* $\{c_n\}$ *definovanou předpisem*

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j},$$

nazveme konvolucí posloupností $\{a_n\}, \{b_n\}$ *a píšeme* $\{c_n\} = \{a_n\} * \{b_n\}$*. Zřejmě pro vytvořující funkce těchto posloupností platí*

$$C(s) = A(s)B(s).$$

Věta 2 *Buďte X_1 a X_2 nezávislé čítací náhodné veličiny a $Y = X_1 + X_2$ jejich součet. Pak*

$$p_n^Y = \{p_n^{X_1}\} * \{p_n^{X_2}\} \qquad a \qquad P_Y(s) = P_{X_1}(s) P_{X_2}(s).$$

Příklad 7: Buďte X_1 a X_2 nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametry λ_1, λ_2. Najděte vytvořující funkce P_{X_1}, P_{X_2} a P_S, kde $S = X_1 + X_2$. (Jak by vypadalo zobecnění pro $X_1 + \cdots + X_n$?)

Definice 4 *Posloupnost $\{a_n\} * \{a_n\}$ se nazývá druhá konvoluční mocnina posloupnosti $\{a_n\}$, značíme $\{a_n\}^{2*} = \{a_n\} * \{a_n\}$. Obdobně definujeme obecnou konvoluční mocninu předpisem $\{a_n\}^{k*} = \{a_n\}^{(k-1)*} * \{a_n\}$.*

Příklad 8: První konvoluční mocnina je $\{a_n\}^{1*} = \{a_n\}$. Jak byste definovali nultou konvoluční mocninu $\{a_n\}^{0*}$? Chceme, aby splňovala $\{a_n\} * \{a_n\}^{0*} = \{a_n\}$. Jak vypadá vytvořující funkce $\{a_n\}^{k*}$?

Příklad 9: Spočtěte n-tou konvoluční mocninu geometrického rozdělení.

Příklad 10: Najděte dvě pravděpodobnostní rozdělení jejichž konvoluce je n-tou konvoluční mocninou rozdělení, které nabývá hodnot: 0 s pravděpodobností 1/3, 1 s pravděpodobností 1/2, 2 s pravděpodobností 1/6.

Věta 3 *(Rozdělení náhodného součtu nezávislých celočíselných veličin)*
Buďte $X_1, X_2, \ldots$ nezávislé stejně rozdělené čítací náhodné veličiny, nezávislé s náhodnou veličinou N. Označme Π vytvořující funkci N a P vytvořující funkci X_i. Buď

$$S_N = X_1 + \ldots X_N.$$

Pak je vytvořující funkce $H(s)$ veličiny S_N rovna $\Pi(P(s))$. Navíc platí, že

- $ES_N = EN\,EX_1$,
- $varS_N = ENvarX_1 + varN(EX_1)^2$.

Příklad 11: Uvažujme model migrace nějaké živočišné skupiny na území s pastmi: Každý jedinec vstoupí do prostoru s pastmi N-krát, kde N je náhodná veličina s geometrickým rozdělením s parametrem θ. Při každé návštěvě se jedinec chytí do pasti s pravděpodobností p, kdykoli je chycen, je zase propuštěn. Označme S počet chycení jedince do pasti. Jaké je rozdělení náhodné veličiny S?

Příklad 12: Buďte X_i nezávislé, alternativně rozdělené náhodné veličiny a N na nich nezávislá veličina s Poissonovým rozdělením s parametrem λ. Jaké je rozdělení $S_N = X_1 + \cdots + X_N$?

Příklad 13: Nechť q_n je pravděpodobnost, že samička nějakého hmyzu naklade n vajíček a p je pravděpodobnost, že z vajíčka se vylíhne zdravý jedinec. Jaká je pravděpodobnost, že samička dá život právě j jedincům?

Příklad 14: V populaci je N bacilonosičů. i-tý bacilonosič nakazí X_i jedinců, předpokládáme, že nikdo není nakažen dvěma bacilonosiči zároveň. Tedy počet nakažených je $\sum_{i=1}^{N} X_i = S_N$. Najděte střední hodnotu a rozptyl S_N, když předpokládáme, že všechny náhodné veličiny jsou nezávislé, N má Poissonovo rozdělení s parametrem λ, X_i s parametrem α.