## Markovovy řetězce se spojitým časem - klasifikace a limitní chování

**Definice 1** *Buďte $J_1, J_2, \dots,$ časové okamžiky, v nichž dochází k přechodům mezi stavy Markovského řetězce se spojitým časem $\{X_t, t \geq 0\}$ a množinou stavů $S$ a definujme posloupnost*

$$Y_0 = X_0, \qquad Y_n = X_{J_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

*Pak $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní Markovův řetězec s diskrétním časem a množinou stavů $S$ a nazývá se vnořený diskrétní řetězec. Jeho matici pravděpodobností přechodu značíme $Q^* = \{q^*_{ij}, i, j, \in S\}$ a je definována následovně*

$$q^*_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i}, & q_i > 0 \\ 0, & q_i = 0 \end{cases} \quad i \neq j$$

$$q^*_{ii} = \begin{cases} 0 & q_i > 0 \\ 1 & q_i = 0 \end{cases}$$

**Definice 2** *Stav $j$ Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$ je dosažitelný ze stavu $i$, jestliže*

$$P_i(X_t = j) = p_{ij}(t) > 0 \ \text{ pro nějaké } t > 0,\ i, j, \in S.$$

**Definice 3** *Stav $j$ řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$ se nazývá trvalý, jestliže buď $q_j = 0$ ($j$ je absorpční), nebo $q_j > 0$ a současně $P_j(T_j(1) < \infty) = 1$, kde*

$$T_j(1) = \inf\{t \geq J_1 : X_t = j\},$$

*je čas prvního návratu do stavu $j$.*
*Stav $j$ je přechodný, jestliže $q_j > 0$ a $P_j(T_j(1) = \infty) > 0$.*
*Trvalý stav $j$ se nazývá nenulový, jestliže buď $q_j = 0$, nebo $E_j T_j(1) < \infty$.*

**Věta 3.14** *Následující vztahy mezi stavy řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$ a vnořeného řetězce $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ jsou ekvivalentní:*
*a) $j$ je dosažitelný z $i$ v $\{X_t, t \geq 0\}$*
*b) $j$ je dosažitelný z $i$ v $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$*
*c) $q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \dots q_{i_{n-1} i_n} > 0$ pro stavy $i_0 = i, i_n = j$ a nějaké stavy $i_1, \dots, i_{n-1}$*
*d) $p_{ij}(t) > 0$ pro všechna $t > 0$*
*e) $p_{ij}(t) > 0$ pro nějaké $t > 0$.*

**Věta** *Stav je trvalý ve vnořeném řetězci $\{Y_n\}$ právě tehdy, když je trvalý v $\{X_t\}$.*

**Příklad 1** Určete matici vnořeného řetězce pro příklad se svářeči. Klasifikujte stavy řetězce.

**Definice 4** *Nechť* $\{X_t, t \geq 0\}$ *je Markovův řetězec se spojitým časem, množinou stavů* $S$ *a maticemi pravděpodobností přechodu* $P(t), t \geq 0$. *Vektor* $\eta = \{\eta_i \geq 0, i \in S\}$ *takový, že*

$$\eta^T P(t) = \eta^T, \ t \in T$$

*se nazývá* <u>*invariantní míra*</u> *procesu* $\{X_t, t \geq 0\}$ *na* $S$ *vzhledem k* $\{P(t), t \geq 0\}$. *Pravděpodobnostní rozdělení* $\pi$ *na* $S$ *splňující stejnou rovnici se nazývá* <u>*stacionární rozdělení*</u>.

pozn. pro řetězce s konečnou množinou stavů plyne z existence invariantní míry zřejmě existence stacionárního rozdělení.

**Definice 5** *Pravděpodobnostní rozdělení* $a = \{a_i, i \in S\}$ *na* $S$ *se nazývá* <u>*limitní rozdělení*</u>, *jestliže pro všechna* $i, j \in S$, $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = a_j$.

**Věta** *Pokud existuje limitní rozdělení Markovova řetězce se spojitým časem, pak je toto rozdělení už nutně stacionární.*

**Věta 3.15** *Buď* $\{X_t, t \geq 0\}$ *Markovův řetězec se spojitým časem, maticí intenzit* $Q$ *a vnořeným řetězcem* $\{Y_n\}$, *který je nerozložitelný a jehož všechny stavy jsou trvalé. Potom existuje invariantní míra* $\eta$ *procesu* $\{X_t, t \geq 0\}$, *která je určena jednoznačně jako řešení soustavy*

$$\eta^T Q = 0^T$$

*a* $0 < \eta_j < \infty$ *pro všechna* $j \in S$, *Jestliže* $\sum_{j\in S} \eta_j < \infty$, *potom* $\pi = \{\pi_j, j \in S\}$, *kde*

$$\pi_j = \frac{\eta_j}{\sum_{k\in S} \eta_k},$$

*je stacionární rozdělení procesu* $\{X_t, t \geq 0\}$.

Pro lepší pochopení souvislostí věta z jiné literatury (J.R.Norris - Markov Chains (97))

**Věta** *Buď* $\{X_t, t \geq 0\}$ *Markovův řetězec se spojitým časem, maticí intenzit* $Q$ *a vnořeným řetězcem* $\{Y_n\}$, *který je nerozložitelný. Potom následující 3 fakty jsou ekvivalentní:*
– *všechny stavy jsou trvalé nenulové,*
– *v řetězci existuje alespoň jeden trvalý nenulový stav,*
– *existuje stacionární rozdělení řetězce (a potom platí* $E_j T_j(1) = \frac{1}{\pi_j q_j}$.*)*

**Věta 3.16** *Buď* $\{X_t, t \geq 0\}$ *Markovův řetězec se spojitým časem, maticí intenzit* $Q$ *a vnořeným řetězcem* $\{Y_n\}$, *který je nerozložitelný a jehož všechny stavy jsou trvalé. Nechť* $\pi = \{\pi_j, j \in S\}$, *kde* $\pi_j > 0$ *pro všechna* $j \in S$, $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$, *je řešení rovnice*

$$\pi^T Q = 0^T.$$

*Potom pro pravděpodobnosti přechodu a absolutní pravděpodobnosti v řetězci* $\{X_t, t \geq 0\}$ *platí*

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j \text{ pro všechna } i, j \in S,$$

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = \pi_j \text{ pro všechna } j \in S.$$

**Příklad 2** Ukažte, že limitní rozdělení počtu svářečů (z příkladu se svářeči) odebírajících proud je binomické s parametry $N$ a $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.
(opět je několik možných postupů řešení - použít matici pravděpodobností přechodu $P(t)$ spočítanou minule a prostě spočítat její limitu pro $t \to \infty$, nebo, pokud neznáme $P(t)$ sestavit Kolmogorovovy diferenciální rovnice přímo pro absolutní pravděpodobnosti $p(t)$, vyřešit a určit limitu, nebo najít stacionární rozdělení a použít Větu 3.16 )

**Příklad 3** V obchodě pracují tři prodavačky. Pokud prodavačka právě někoho obsluhuje, pak pravděspodobnost, že zákazníka doobslouží v časovém intervalu $(t, t+h]$ a nikoho obsluhovat nebude, je $3h + o(h)$. V intervalu $(t, t+h]$ přijde jeden zákazník s pravděpodobností $2h + o(h)$, dva nebo více s pravděpodobností $o(h)$ a žádný s pravděpodobností $1 - 2h + o(h)$. Předpokládejme, že zákazníci přicházejí zaměstnávat jednotlivé prodavačky nezávisle a rovnež ony se chovají nezávisle na svých kolegyních. Pokud všechny prodavačky obsluhují, nově příchozí zákazník odchází neobsloužen. Buď $\{X_t, t \geq 0\}$ Markovův řetězec udávající počet prodavaček obsluhujících zákazníky v čase $t$. Najděte matici intenzit řetězce $X_t, t \geq 0$. Určete rozdělení počtu obsluhujících prodavaček v ustáleném režimu (tj. limitní rozdělení řetězce). Jaká je pravděpodobnost, že v ustáleném režimu žádná z prodavaček neobsluhuje zákazníka?

**Příklad 4** Na horskou chatu spolu vyjeli tři kamarádi. Při příjezdu na chatu v čase $t = 0$ je jeden z nich nemocný. Vlastnosti nemoci jsou takové, že jsou-li spolu zdravý a nemocný jedinec, pak ten nemocný nakazí zdravého v časovém intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\frac{1}{2}h + o(h)$. Jedinec nemocný v čase $t$ se naopak uzdraví v časovém intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\frac{1}{3}h + o(h)$. Uzdravování a infikování jednotlivých jedinců probíhá nezávisle (nakažený=infikovaný=nemocný). Zdravý jedinec nemůže nakazit nikoho. Nechť $X_t$ udává počet nemocných kamarádů na chatě v čase $t$. Určete matici intenzit přechodu řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. Spočtěte matici pravděpodobností přechodu vnořeného řetězce. Spočtěte stacionární rozdělení řetězce. jaká je střední hodnota doby setrvání řetězce v počátečním stavu?

**Příklad 5** Uvažujme Markovův řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ s maticí intenzit

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ pq & -p & p^2 & 0 & 0 & \dots \\ p^2q & 0 & -p^2 & p^3 & 0 & \dots \\ p^3q & 0 & 0 & -p^3 & p^4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

kde $0 < p < 1$ je parametr a $q = 1 - p$.
a) Ověřte, že $Q$ je skutečně matice intenzit.
b) Určete matici vnořeného řetězce.
c) Existuje stacionární rozdělení ve vnořeném řetězci?
d) Existuje stacionární rozdělení v řetězci $\{X_t, t \geq 0\}$?
e) Klasifikujte stavy řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$
f) Uměli byste najít příklad matice intenzit takové, že by klasifikace nulovosti pro $Q$ a $Q^*$ vyšla obráceně?

**Příklad 6** Uvažujme Markovův řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ s maticí intenzit

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -4 & 3 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Určete matici vnořeného řetězce, rozhodněte, zda jsou všechny stavy trvalé. Zjistěte, jestli existuje stacionární rozdělení vnořeného řetězce, a pokud ano, tak ho určete. Zjistěte, jestli existuje stacionární rozdělení řetězce s maticí intenzit $Q$, a pokud ano, tak ho určete.

**Příklad 7** Uvažujme Markovovy řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$ s maticemi intenzit

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{2}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{2}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

Pro všechny matice určete matici vnořeného řetězce a rozhodněte, zda jsou všechny stavy trvalé. Zjistěte, jestli existuje stacionární rozdělení vnořeného řetězce, a pokud ano, tak ho určete. Zjistěte, jestli existuje stacionární rozdělení řetězce s maticí intenzit $Q$, a pokud ano, tak ho určete. Rozmyslete si, jak se liší dynamika přechodů pro vnořený řetězec a řetězec se spojitým časem pro tyto tři varianty náhodné procházky.

**Příklad 8** Na letišti uvažujme pět přepážek pro odbavení cestujících. Předpokládejme, že příchody cestujících k přepážkám tvoří Poissonův proces. Pokud jsou všechny přepážky obsazeny, řadí se cestující do jedné fronty (na letišti je dost místa, takže fronta může být libovolně dlouhá). Dále předpokládejme, že doby odbavení jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 3 minuty. Najděte limitní rozdělení počtu cestujících v systému (u přepážek i ve frontě celkem), pokud cestující přicházejí v průměru každou minutu.

**Příklad 9** V holičství pracují 3 holiči. Každý z nich obsluhuje jednohom zákazníka průměrně 10 minut. Do holoičství přichází v průměru 12 zákazníků za hodinu. V případě, že žádný z holičů není volný, zákazníci čekají ve frontě, přičemž zákazník, který by se musel do fronty zařadit jako čtvrtý, odchází neobsloužen. Předpokládejme, že doby mezi příchody zákazníků i doby obsluhy jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením. Označme $X_t$ počet zákazníků v holičství (ve frontě i v obsluze) v čase $t$.

a) Určete matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$.

b) Najděte stacionární rozdělení počtu zákazníků v holičství (pokud existuje).

c) Určete střední počet zákazníků ve frontě (při stacionárním rozdělení).