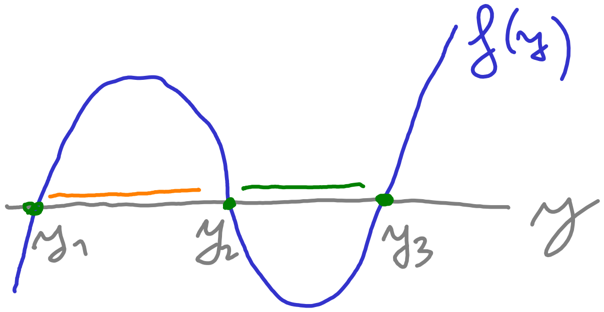
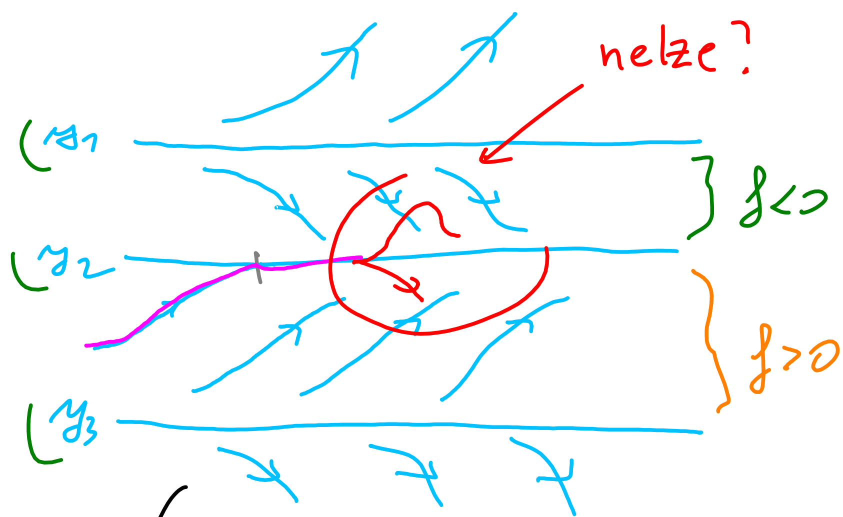
Téma: diferenciální rovnice

VIII.1 Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojité.
Pak každé řešení rce $y' = f(y)$ je monotónní.

Komentář – obrázky



(graf $y \mapsto f(y)$)



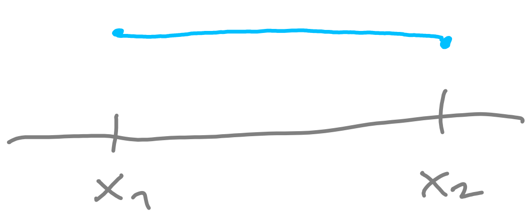
(grafy $x \mapsto y(x)$ řešení rce)

Návod: 1) Lemma: $y: I \to \mathbb{R}$ spojité, $I \subset \mathbb{R}$ interval.

Pak: f je monotónní $\iff$

$\forall x_1 < x_2 \in I: f(x_1) = f(x_2)$, pak

$f \equiv f(x_1)$ na $[x_1, x_2]$.



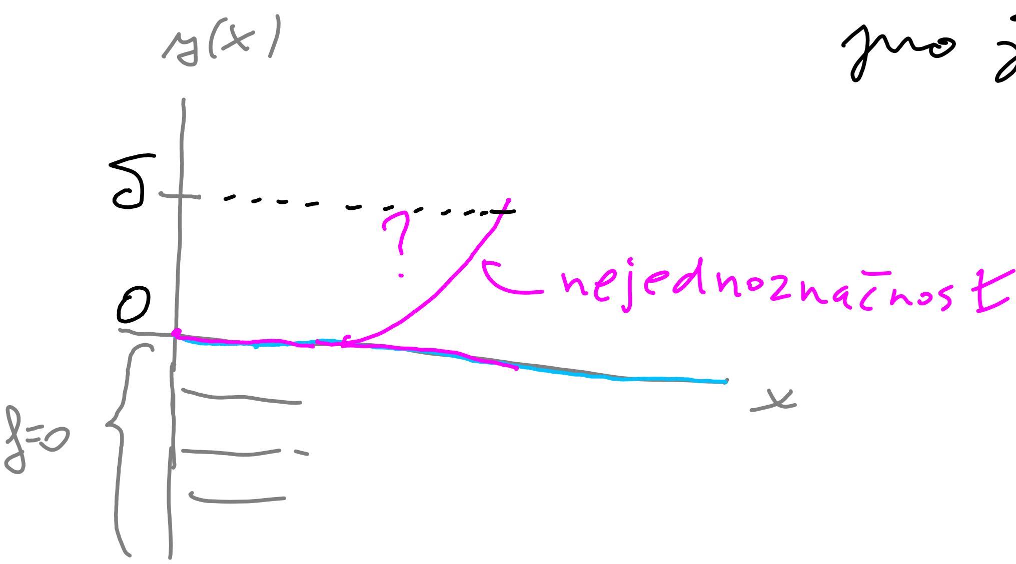
2) TRIK: násob rovnici y', $\int_{x_1}^{x_2} dx$

(sestavení rovnice)

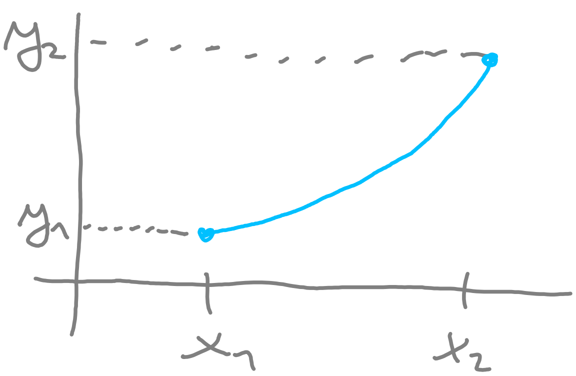
VIII.2 Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojité, nechť platí $f(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ >0, & y > 0 \end{cases}$ $\quad (f(0)=0)$

Pak rovnice $\boxed{y' = f(y),\ y(0) = 0}$ má nenulové řešení $\iff$ $\int_0^{\delta} \frac{du}{f(u)} < \infty$,

pro jisté (⟺ každé) $\delta > 0$.



Pozn. Barrowův vzorec:



$$\underbrace{x_2 - x_1}_{\text{čas}} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{du}{f(u)}$$

(řešení $y' = f(y)$)

Předpoklady: $f \neq 0$, nejlépe na (y_1, y_2)

lze mít $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^*$

***VIII.3**

$$y'(x) = y(\sqrt{x}), \quad \forall x \geq 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y: [0, \infty) \to [0, \infty).$$

Dokažte, že jediné řešení je $y \equiv 0$.

***VIII.4.** $y''(x) + y'(x) + y(x) \to 0, \; x \to \infty$

$\Rightarrow \; y(x) \to 0, \; x \to \infty.$

Tvrzení: Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ otevřená.

Nechť $f_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, $f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou spojité.

Nechť $\boxed{f_1 < f_2 \text{ v } \Omega.}$

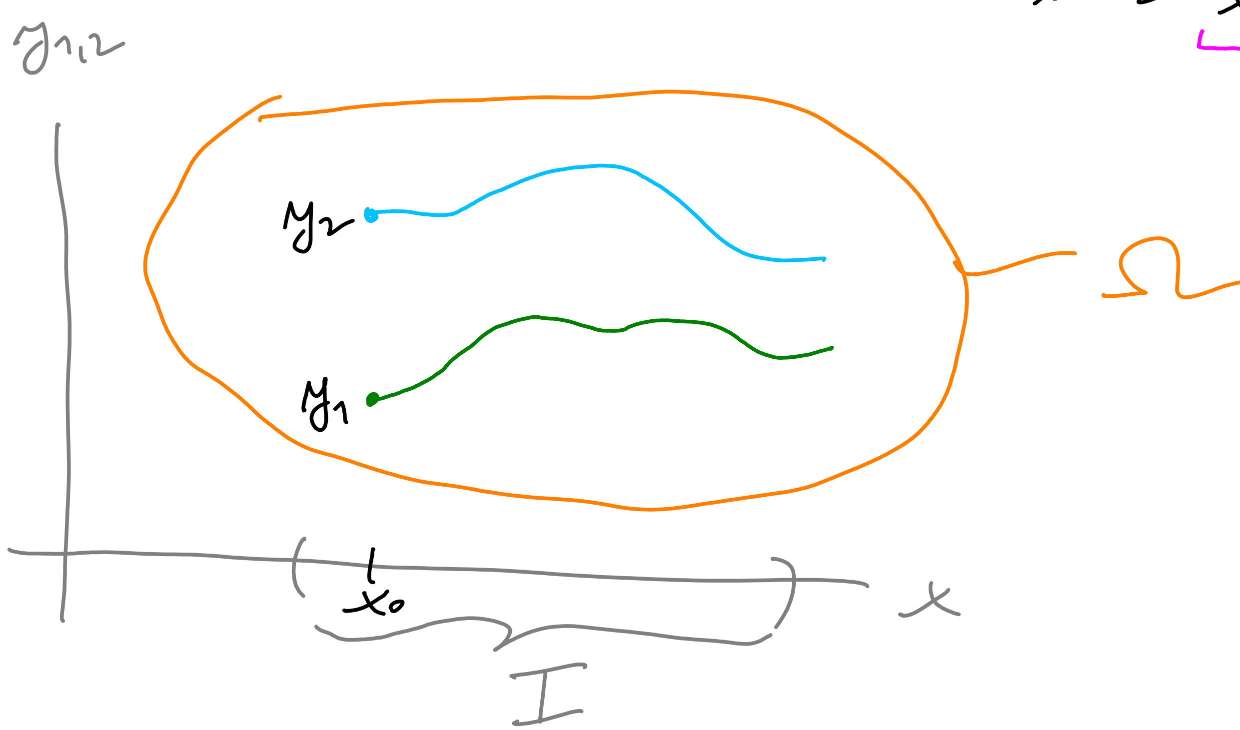
Buďte $y_1 : I \to \mathbb{R}$ resp. $y_2 : I \to \mathbb{R}$ jsou řešení rovnice:

$$y' = f_1(t,y) \text{ resp. } y' = f_2(t,y) \text{ v } \Omega.$$

Nechť $y_1(t_0) < y_2(t_0)$ pro $x_0 \in I$.

Pak: $y_1(t) < y_2(t)$ pro $\forall t \in I$,

s.t. $t > t_0$



Slovně řečeno: větší pravé strana

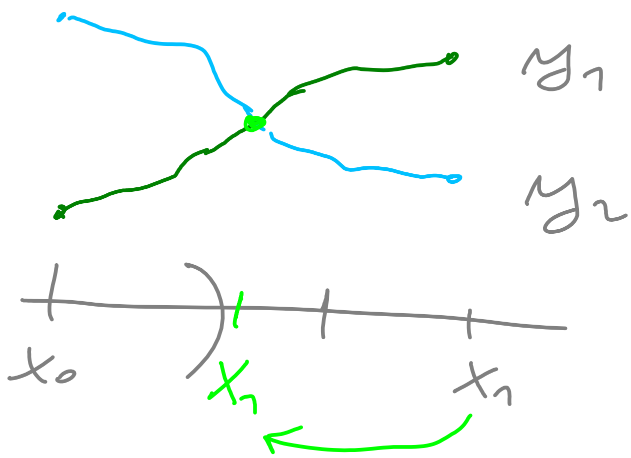
+ větší poč. podmínka

$\Rightarrow$ větší řešení

Dk.: ?? $\exists\, x_1 \in I;\ x_1 > x_0$ t.ž.

$$y_1(x_1) \geq y_2(x_1)$$

$>$



BÚNO: x_1 nejmenší takové

(přesně: $x_1 > x_0$

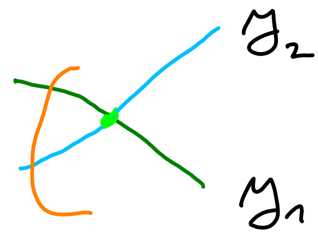
$y_1(x_1) = y_2(x_2)$)

avšak: $$y_1'(x_1) = f_1(x_1, y_1(x_1))$$

$$\overset{\parallel}{} $$

$$< f_2(x_1, y_2(x_1)) = y_2'(x_1)$$

$\Rightarrow \quad y_1'(x_1) < y_2'(x_1)$



$\Rightarrow \quad y_2 < y_1$ na $(x_1 - \delta, x_1]$,

SPOR: minimalnosti x_1 $\square$