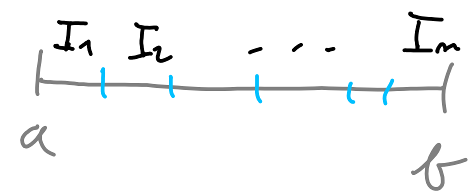
Tvrzení V.1 Buď $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená.

Potom $f \in R([a,b]) \iff N(f,[a,b])$ je nulová.

Dk. stačí „$\Leftarrow$". Chci ukázat: $\exists$ D dělení

t. ž. $\underbrace{S(f,D) - s(f,D)}_{= \sum_{j=1}^{m} osc(f,I_j) \cdot |I_j|}$ je libovolně malé



idea 1: rozdělíme interval
- malá část, kde f je ošklivá (hodně osciluje)
- zbytek, kde f je pěkná (malé oscilace)

idea 2: nekonečné pokrytí $\xrightarrow{\text{kompaktnost}}$ konečné „

Buď $\varepsilon > 0$ dáno (BÚNO: $|f| \leq K$ (někde v $\mathbb{R}$))

$$[a,b] = \{x; osc(f,x) \geq \varepsilon\} \cup \{x; osc(f,x) < \varepsilon\}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{B}$$

víme: $A \subset \mathcal{N}(f,[a,b])$, tedy nulová

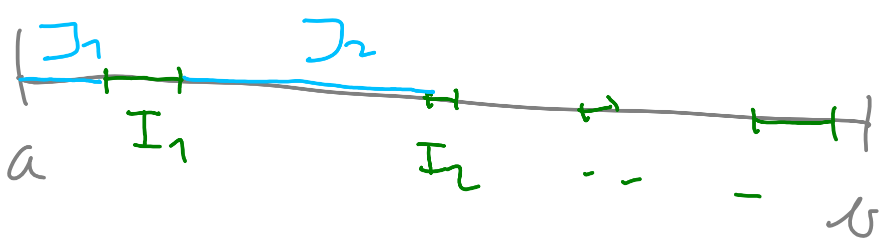
$\Rightarrow$ $\exists \{I_j\}$ intervaly t.ž. $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$

BÚNO: otevřené

navíc $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon$

leč: A uzavřené (omezené: $\subseteq [a,b]$)

kompaktní: $\exists n \in \mathbb{N}$ t.ž. $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j$



zbytek: $[a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j = \bigcup_{k=1}^{m} J_k$

uzavřené intervaly

víme: $osc(f,x) < \varepsilon, \ \forall x \in J_k$

$\cancel{\Rightarrow}$ $osc(f, J_k) < \varepsilon$

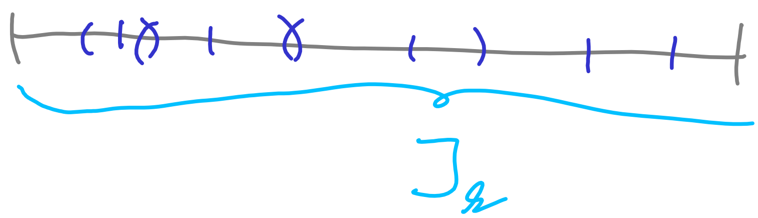
opět princip kompaktnosti: r pevné:

$$J_r \subset \bigcup_{x\in J_r} \underbrace{U(x,\delta_x)}_{\text{otevřené intervaly}}$$

, kde $\delta_x > 0$ volíme t.ž. $osc(f, U(x,\delta_x)) < \varepsilon$

omez. & uzavř.

$\Rightarrow$ $\exists$ konečné podpokrytí:



$\Rightarrow$ lze psát: $J_r = \bigcup_{l=1}^{p_r} J_{r,l}$

t.ž. $osc(f, J_{r,l}) < \varepsilon$

$\forall l = 1, \dots p_r$

---

množ D -- dělení $[a,b]$ určené intervaly:

I_j -- $j = 1, \dots m$

$J_{r,l}$ -- ($r = 1, \dots m$; $l = 1, \dots p_r$)

$$S(f,D) - s(f,D) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\operatorname{osc}(f,I_j)}_{\leq 2K} \cdot |I_j| + \sum_{k,l} \underbrace{\operatorname{osc}(f,J_{kl})}_{< \varepsilon} |J_{kl}|$$

$$(|f| \leq K)$$

$$\leq 2K \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{m} |I_j|}_{< \varepsilon} + \varepsilon \cdot \underbrace{\sum_{k,l} |J_{kl}|}_{\leq b-a}$$

$$\leq 2K \cdot \varepsilon + \varepsilon (b-a)$$

$$= \varepsilon (2K + b - a) \qquad \square$$

Téma: exkurs do teorie čísel, část 2.

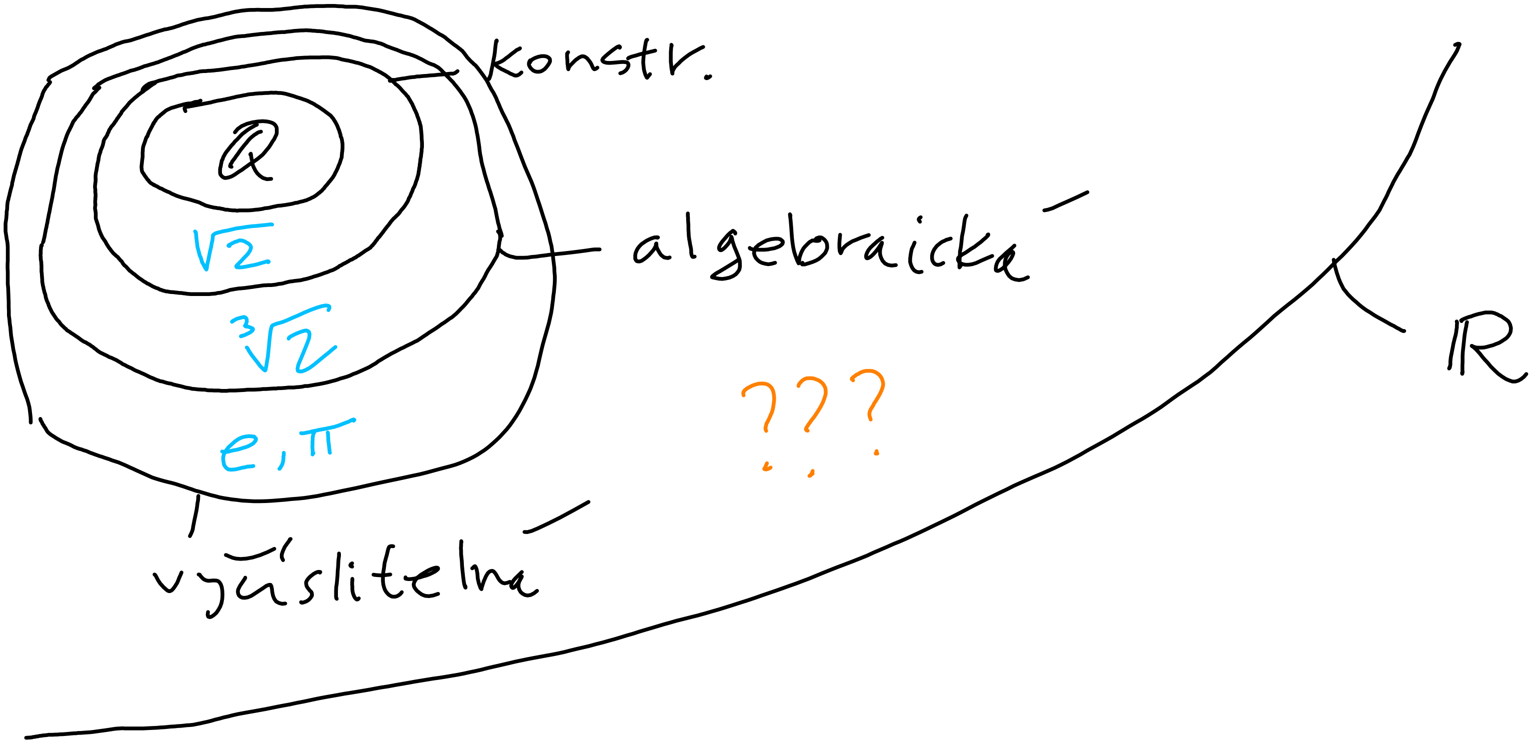
Def. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme <u>algebraické</u>, jestliže $\exists\, P(x)$ netriviální polynom s celočíselnými koeficienty t.ž. $P(\alpha)=0$.

Číslo nazveme <u>transcendentní</u>, pokud není algebraické.

Číslo α nazveme <u>konstruovatelné</u>, jestliže lze vyjádřit <u>konečnou kombinací</u> operací aritmetiky $(+,-,\cdot,/)$ a druhé odmocniny $(\sqrt{\ })$.

(Ekvivalentně: délku α lze sestrojit pomocí kružítka a pravítka)

Číslo α nazveme <u>vyčíslitelné</u> (computable), pokud existuje <u>konečný algoritmus</u>, který dá vyčíslit α s libovolnou přesností.



Rozcvička 1) e je iracionální

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \text{ tj. } \quad 0 < \underbrace{e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{LS} = \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}}_{PS}$$

?? $e = \frac{r}{q}$, $r, q \in \mathbb{N}$

LS: $0 < \frac{r}{q} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{m}{q \cdot n!} \geq \frac{1}{q \cdot n!}$

PS: $\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\underbrace{\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\dots\right]}$$

$$\leq \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^{l} = \frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{q\cdot n!} \leq \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}$$

$$\frac{1}{q} \leq \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} \to 0, \quad n\to\infty.$$

$\lightning\lightning$

---

2) π je iracionální: ?? $\pi = \frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$

úvaha: $I = \int_0^{\pi} \sin x \cdot f(x)\,dx$, kde $f(x) = q^n x^n (\pi - x)^n \cdot \frac{1}{n!}$

per-partes: $u' = \sin x, \quad u = -\cos x$

$v = f$

$$I = \underbrace{\left[-\cos x \cdot f(x)\right]_0^{\pi}}_{f(0)+f(\pi)} + \underbrace{\int_0^{\pi} \cos x \cdot f'(x)\,dx}_{\text{opět per-partes}}$$

$$\Rightarrow \quad I = f(0) + f(\pi) - f''(0) - f''(\pi) + \dots$$

$$= F(0) + F(\pi) \in \mathbb{Z}, \quad \text{kde}$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\cancel{\infty}\; n} (-1)^k f^{(2k)}(x)$$

---

pozorování: 1) $I > 0, \ \to 0 \ (n \to \infty)$

2) $PS \in \mathbb{Z}$

↯ ↯

Dále platí: e^{α} iracionální, $\forall \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Problém. $\exists$ transcendentní čísla?

ano: např. $\theta := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{k!}}$

e, π