19.4.

Domněnka: $\mathbb{R}$ je nulová.

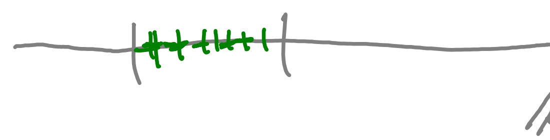
„Dk": (fake proof) víme: $\mathbb{Q}$ je spočetné $= \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$

$\varepsilon > 0$ dáno, malé jemné

polož $I_j = \left(\alpha_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, \alpha_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right)$

vidíme: $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| = \sum_{j=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \varepsilon.$

zřejmě: $\boxed{\mathbb{R} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j}$



je nesnadné představit si to

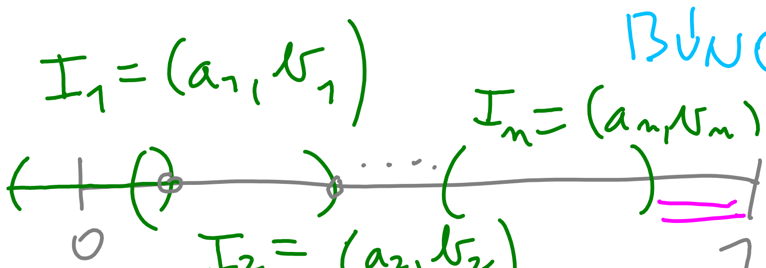
$\square$

Vyvrácení: ?? $[0,1] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$

dle V.5 $\Rightarrow$ (princip kompaktnosti) $\exists n \in \mathbb{N}$ t.ž. $[0,1] \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j$

např. $\exists j$ t.ž. $0 \in I_j$

BÚNO: $j = 1$



$b_1 \in I_2$ BÚNO

$$b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{n} (b_j - b_{j-1})$$

$$< \underbrace{b_1 - a_1}_{(<0)} + \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \qquad (a_j < b_{j-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |I_j| < \varepsilon$$

↯

Pozn. důležitost principu kompaktnosti

- spočetné verze (minule)
- obecné verze (*)

BÚNO: $\Pi = [a,b]$

zlíčivé lemma (viz série 1)

úlohy dnes: L.2, body 2, 3

Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

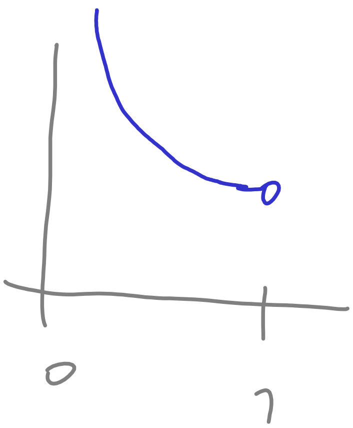
$$\underbrace{\{x;\ \operatorname{osc}(f,x) < a\}}_{\text{je otevřené}} = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{x;\ \operatorname{osc}(f,x) \geq a\}}_{\text{je uzavřené}}$$

je otevřené $\Longleftrightarrow$ je uzavřené

Pozorování: $\operatorname{osc}(f, I) < a$, I otevřený interval

$$\Rightarrow \forall x_0 \in I : \operatorname{osc}(f, x_0) < a$$

$\not\Leftarrow$: uvaž $f = \frac{1}{x}$ na $(0,1)$



$$\operatorname{osc}\left(\tfrac{1}{x}, x_0\right) = 0 \quad \forall x_0 > 0$$

(spojitost)

ALE: $\operatorname{osc}\left(\tfrac{1}{x}, (0,1)\right) = +\infty$

Dále: V.3

V.4

Tvrzení 1 Buď $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená.

Pak $f \in R([a,b]) \iff N(f, [a,b])$ je nulová.

body nespojitosti

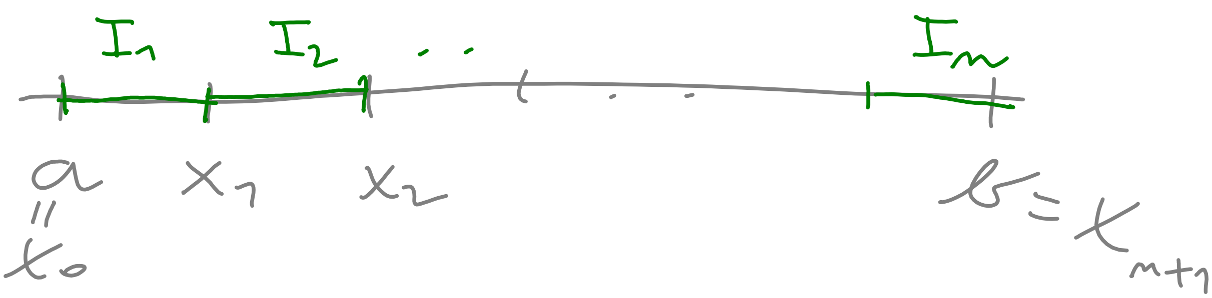
Dk. V.7.4: $f \in R([a,b])$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists D \ldots$ dělení $[a,b)$ t.ž.

$$\underbrace{S(f,D) - s(f,D)}_{=} < \varepsilon$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sup f(I_j)\cdot|I_j| - \sum_{j=1}^{n} \inf f(I_j)|I_j|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}(f, I_j)\cdot|I_j|$$



dělení D $\longleftrightarrow$ $\{I_j\}$ – skoro disj., nenulové

BÚNO $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\left(f(x) = \begin{cases} f(a), & x < a \\ f(b), & x > b \end{cases} \right)$

---

1. $\Rightarrow$: negujme :

$n(f,[a,b])$ není nulová $\Rightarrow$ $f \notin R([a,b])$

uvažme: L.2, bod 1

$$\mathcal{N}(f,[a,b]) = \{x\in[a,b];\ \mathrm{osc}(f,x)>0\}$$

$$= \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{N}_l$$, kde klademe

$$\mathcal{N}_l = \{x\in[a,b];\ \mathrm{osc}(f,x)\ge \frac{1}{l}\}$$

pozoruji: $\exists\, l\in\mathbb{N}$ t.ž. $\mathcal{N}_l$ není nulová

($\Leftarrow$ L.1, bod 2)

tj. $\exists\, \tilde{\varepsilon}>0$ t.ž. platí

$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \ge \tilde{\varepsilon}$, pro libovolné

intervaly t.ž. $\mathcal{N}_l \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$

Buď D ... libovolné dělení $[a,b]$

$\{I_j\}_{j=1}^{n}$ -- uzavř. inter.

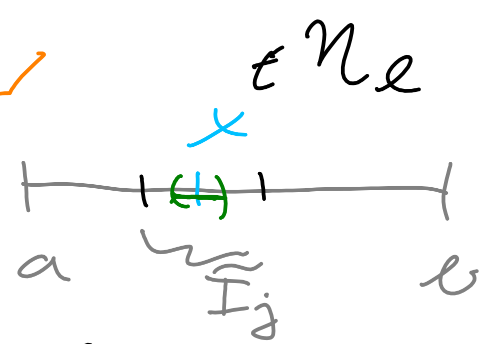
ponecháme jen takové, že oscilace f je na nich $\geq \frac{1}{\ell}$

--- značme je $\{\tilde{I}_j\}_{j=1}^{\tilde{m}}$, $\tilde{m} \leq m$

klíčové pozorování:

$$N_\ell \subset \bigcup_{j=1}^{\tilde{m}} \tilde{I}_j \cup K$$

krajní body (nulové délky)



$\operatorname{osc}(f,x) \geq \frac{1}{\ell} \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tak, že

$\operatorname{osc}(f, U(x,\delta)) \geq \frac{1}{\ell}$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\tilde{m}} |\tilde{I}_j| \geq \tilde{\varepsilon}$$

---

navíc: $S(D,f) - s(D,f)$

$$= \sum_{j=1}^{m} \operatorname{osc}(f, I_j) \cdot |I_j|$$

$$> \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \underbrace{\operatorname{osc}(f, \tilde{I}_j)}_{\geq \frac{1}{\ell}} \cdot |\tilde{I}_j| \geq \frac{1}{\ell} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{\tilde{m}} |\tilde{I}_j|}_{\geq \tilde{\varepsilon}}$$

$$\geq \frac{1}{\ell} \tilde{\varepsilon}$$

, D ~~hilovolné~~

Tj: $f \notin \mathcal{R}([a,b])$. $\square$