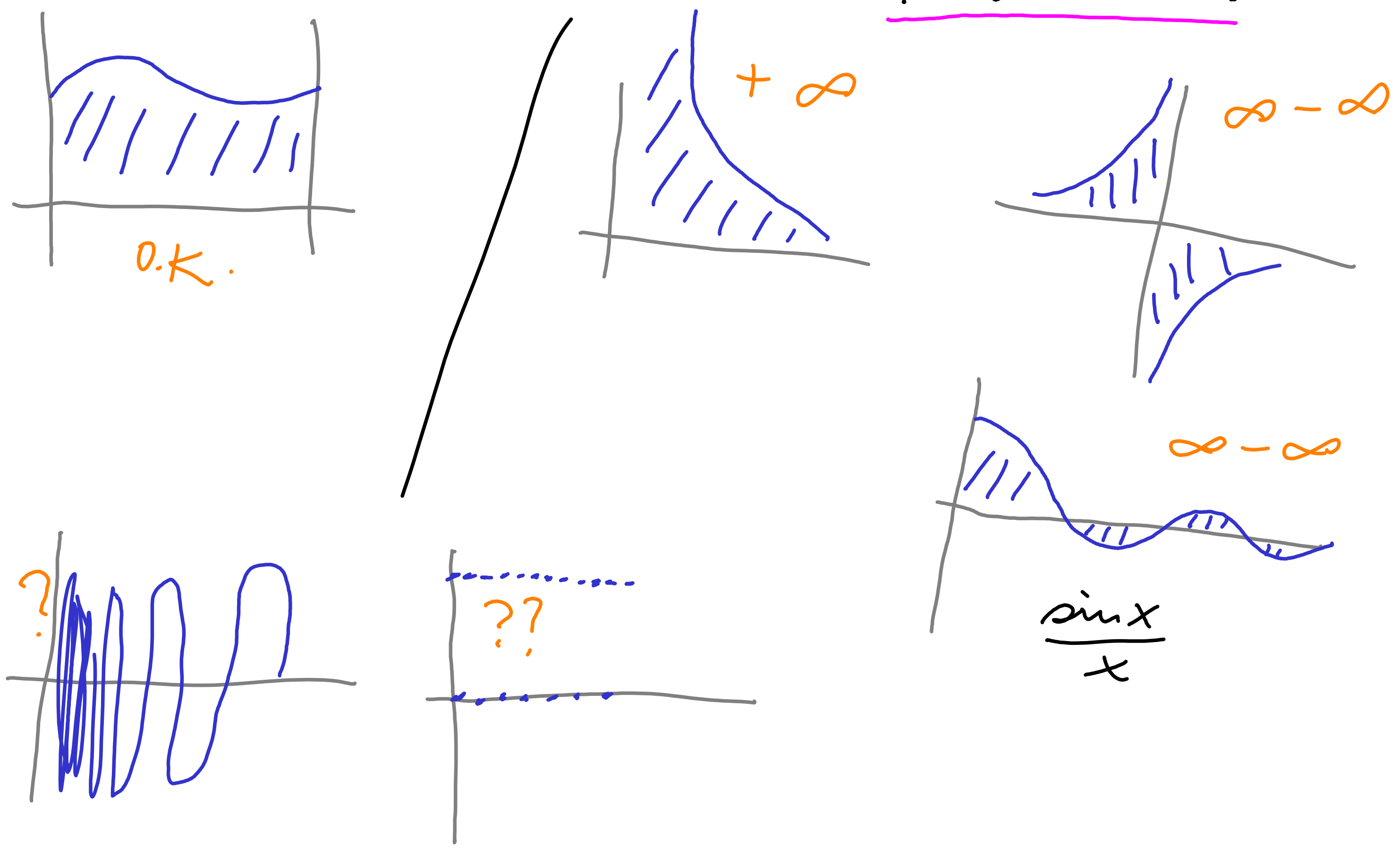
Téma: charakterizace R. i. funkcí

Pozn.: nepřátelé integrálu < nespojitost / neomezenost } fce



Tvrzení 1. Buď $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená.

Potom: $f \in \mathcal{R}([a,b])$

$$\Updownarrow$$

$\mathcal{N}(f,[a,b])$ je nulová.

body nespojitosti.

Def. $M \subset \mathbb{R}$ se nazve nulová, jestliže:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ intervaly $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ t. ž.

- $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$
- $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon$.

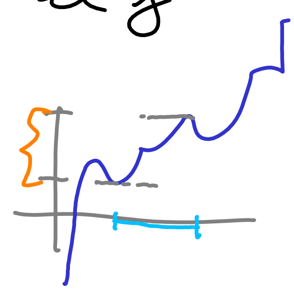
Značení: Pro libovolný interval $I \subset \mathbb{R}$ značí $|I|$ jeho délku.

$(\in [0, +\infty])$

Pozn.: nulová = (Lebesgueovy) míry nula

Def. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Oscilací funkce f na množině $M \subset \mathbb{R}$ rozumíme

$$\operatorname{osc}(f, M) := \sup f(M) - \inf f(M).$$



Oscilací funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme

$$\operatorname{osc}(f, x_0) := \lim_{\delta \to 0+} \operatorname{osc}(f, U(x_0, \delta)).$$

$\mathcal{U}(x_0,\delta) = (x_0-\delta, x_0+\delta).$

Pozn. má smysl!

Úkoly dnes: V.1, V.2 (L.2 – jen část 1)
V.3

---

ad L.1,3... Cantorovo diskontinuum

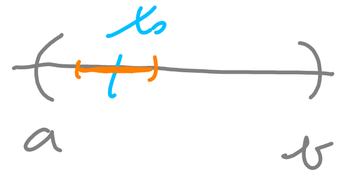
Def. $M \subset \mathbb{R}$ se nazve <u>otevřená</u>, jestliže:

$\forall x_0 \in M \ \exists \delta > 0$ t.ž. $\mathcal{U}(x_0,\delta) \subset M$.

$M \subset \mathbb{R}$ se nazve <u>uzavřená</u>, jestliže:

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M, \ x_n \to x_0 \implies x_0 \in M.$

Pozn. 1) (a,b) je otevřená množina



2) $[a,b]$ je uzavřená množina:

$$\underbrace{x_n \in [a,b]}_{a \le x_n \le b},\ x_n \to x_0 \implies \underbrace{x_0 \in [a,b]}_{a \le x_0 \le b}.$$

3) množina může obojí (např. $\mathbb{R}$, $\emptyset$)

nemusí být ani jedno: $\mathbb{Q}$, $[0,1)$

Platí: $M \subset \mathbb{R}$ je otevřené

$\Updownarrow$

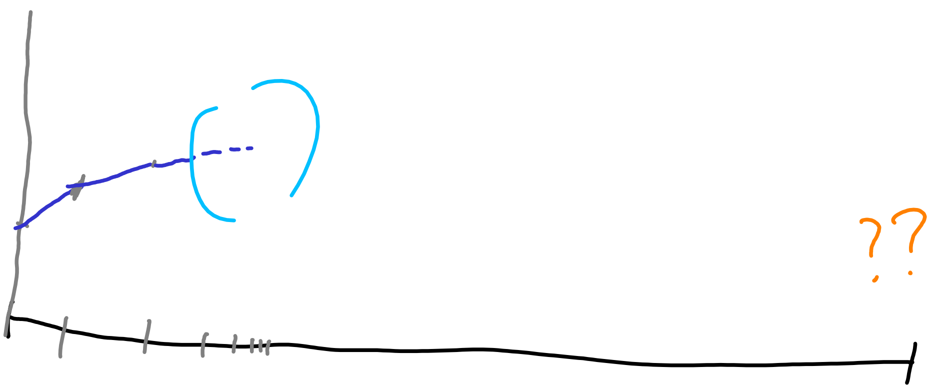
$\mathbb{R} \setminus M$ je uzavřené

---

ad V.5 [princip kompaktnosti.]

... série I: $D^1_+ f(x) > 0 \quad \forall x \in [x_0, x_1]$

$\Rightarrow \quad f(x_0) < f(x_1)$



Lemma V.5 (počáteční verze.)

nechť $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, uzavřená množina.

nechť $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ jsou otevřené intervaly t.ž.

$M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Pak $\exists N \in \mathbb{N}$ t.ž. $M \subset \bigcup_{j=1}^{N} I_j$.

Dk. ?? $M \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_j, \ \forall n \in \mathbb{N}$

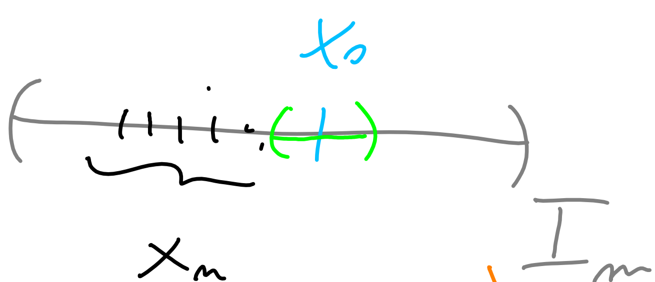
$\Rightarrow$ volme body $x_n \in M \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j$.

zřejmě $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená

BÚNO: $x_n \to x_0$ (B-W. věta)

musí $x_0 \in M$ (uzavřenost)

ale: $\exists\, m \in \mathbb{N}$ t.ž. $x_0 \in I_m$



otevření:

$x_n \in I_m$ pro n velké ↯↯

$n \geq m$