15.3.2021

Série: nekonečné součiny

Def. Řekneme, že nekonečný součin **konverguje**, jestliže $\exists \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} a_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Obecněji: $\exists n_0$ s.t. $\prod_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konverguje ve smyslu výše uvedeném.

BÚNO: $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

(Obecné teorie: V. Jarník, DII, K. III.)

ad II.1 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, kde

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$$

? monotonie:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\Big(\underbrace{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}_{<0}\Big) \quad \forall x>0$$

Dk.: Lagrangeova věta:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad \forall x>0$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ klesá na $(0,+\infty)$, tj $f\left(\frac{1}{n}\right)$ roste.

? rychlost konvergence: $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$

(Taylorův pol.)

$\Rightarrow$ $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim 1 - \frac{1}{2n}$, $n \to \infty$

Analogicky: $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \sim 1 + \frac{1}{12n^2}$, $n \to \infty$

? lepší odhad chyby:

$f(x) = f(0) + x f'(0) + R(x)$, kde $R(x) = \frac{x^2}{2} f''(c)$

Věta 4.19 (ZS) (Lagrangeův tvar zbytku) $c \in (0,x)$

$\Rightarrow$ $\ln(1+x) = x - \frac{1}{(1+c)^2} \cdot \frac{x^2}{2}$, $c \in (0,x)$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 - b_n$, kde $0 < b_n < \frac{1}{2n}$

Analogicky: $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = 1 + b_n$

kde $0 < b_n < \frac{1}{12n^2}$

Pozn.: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + (\dots\dots)$

$\underbrace{\sqrt{1+x}}_{= f(x)}$

horší odhad $o(x)$, $x \to 0$

lepší odhad $|\quad| \le C x^2$

Věta 4.19: $f''(\theta)\cdot\frac{x^2}{2}$

kde θ je mezi $0, x$.

Aplikace. Stirlingova formule

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots\dots n$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\cdot n^n$$

$$= \frac{n^n}{e^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\right) =: a_k$$

? konverguje $\left(\xrightarrow{n\to\infty} c \in (0,+\infty)\right)$

NE!! víme: $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k$ konv.

leč: $\ln a_k = 1 - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \sim \frac{1}{k}$, $\sum \frac{1}{k}$ div.

Oprava: místo $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{2+\frac{1}{2}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1+\frac{1}{2}} \cdot n^{n+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^{n-1}} \underbrace{\prod_{k=1}^{n-1} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}}}_{\text{konverguje !!}} =: \tilde{a}_n$$

$$\ln \tilde{a}_n = 1 - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{k^2}$$

$\sum \frac{1}{k^2}$ konv.

$$\Rightarrow \quad n! \sim \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(stačí Stirling)