Značení. Buď $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost (rostoucí, všech) prvočísel, dále

$$\pi(x) = \max\{k;\ p_k \le x\}$$

prvočíselná funkce a konečně

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \qquad x > 1$$

Riemannova zeta funkce.

Prvočíselná věta. $\pi(x) \approx x/\ln x$, $x \to +\infty$.

Tvrzení 1. [Čebyšev.] Existují C_1, $C_2 > 0$ a $x_0 > 0$ tak, že

$$C_1 \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < C_2 \frac{x}{\ln x} \qquad \forall x \ge x_0$$

Tvrzení 2. [Riemann.] Pro každé $x > 1$ jest

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^x}} = \zeta(x)$$

Důsledek. $\sum_{k=1}^{\infty} 1/p_k = +\infty$.

. . . .

III.1* Nechť $n \ge k$ jsou přirozená čísla. Zřejmě lze psát (a to jediným způsobem, díky základní větě aritmetiky)

$$\binom{n}{k} = z_1^{u_1} z_2^{u_2} \dots z_N^{u_N}$$

kde z_j jsou (vzájemně různá) prvočísla a u_j celé, nenulové exponenty. Ukažte, že pro součin vpravo platí (pro každé $j = 1, \dots, N$):

(o) $z_j \le n$, a tedy $N \le \pi(N)$

(i) všechna prvočísla $n \ge p > \max\{k, n-k\}$ jsou přítomna s exponentem 1.

(ii) $u_j \ge 1$, tedy speciálně $\binom{n}{k}$ je celé číslo.

(iii) $u_j \le \ln n / \ln z_j$, ekvivalentně $z_j^{u_j} \le n$

III.2* Nechť $q_n > 0$. Pak nekonečný součin $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + q_n)$ lze „formálně roznásobit“, a vyjde . . .

III.3* Ukažte, že posloupnost p_k obsahuje libovolně velké mezery. Obecněji, odvoďte z Čebyševovy nerovnosti horní a dolní odhady růstu posloupnosti $\{p_k\}$.