Cvičení 62: Zjistěte, zda lze definovat na $\mathbb{R}$ metriku rovností

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &:= |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|\,, \quad \text{resp.}\\ \rho(x,y) &:= \operatorname{arctg}(|x-y|)\end{aligned}$$

Je-li odpověď kladná, zjistěte, zda lze funkci arctg nahradit libovolnou (spojitou) rostoucí funkcí (resp. rostoucí (spojitou) funkcí na intervalu $[0,\infty)$, která v má v počátku hodnotu 0).

Cvičení 63: V $\mathbb{R}^2$ pro $x=[x_1,x_2]$, $y=[y_1,y_2]$ definujeme

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &:= \sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2}+\sqrt{|y_1|^2+|y_2|^2}\,,\\ &:= \sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2}\,,\end{aligned}$$

přičemž první definiční rovnost používáme pro případ, že x,y jsou lineárně nezávislé vektory a druhou v případě, že x,y jsou lineárně závislé („měříme přes počátek“). Dokažte, že ρ je metrika na $\mathbb{R}^2$. Dostali bychom metriku, kdybychom „měřili přes přímku“? Zkuste si rozmyslet analogii s kružnicí.

Cvičení 64: Ukažte, že v (P,ρ) na množině $\exp(P)$ všech podmnožin P lze definovat (Hausdorfovu) metriku předpisem

$$\rho_H(A,B) := \sup\{\max(\operatorname{dist}(x,B),\operatorname{dist}(y,A))\,;\, x\in A,\, y\in B\}\,!$$

Cvičení 65: Ukažte, že na lineárním prostoru (LP) všech posloupností $a=\{a_k\}$, pro něž $\sum|a_k|<\infty$ lze definovat normy rovnostmi $\nu_1(a):=\sup\{|a_k|\,;\,k\in\mathbb{N}_0\}$ a $\nu_2(a):=\sum|a_k|$. Je mezi těmito normami na vzniklých NLP nejaký vztah?

Cvičení 66: Ověřte, že na lineárním prostoru (LP) spojitých funkcí $\mathcal{C}([a,b])$, lze definovat normy $\nu_1(f):=\sup\{|f(t)|\,;\,t\in[a,b]\}$ a $\nu_2(f):=\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t$. Je mezi těmito normami na vzniklých NLP nejaký vztah?

Cvičení 67: Pokuste se definovat metriku na LP $\mathcal{C}(\mathbb{R})$!

Cvičení 68: Dokažte, že

$$\rho(f,g)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,\frac{\sup\{|f(t)-g(t)\,;\,t\in[-k,k]}{1+\sup\{|f(t)-g(t)\,;\,t\in[-k,k]}$$

je metrika na LP $\mathcal{C}(\mathbb{R})$!

Cvičení 69: Je-li $M\subset\mathbb{R}^m$ množina všech bodů, jejichž souřadnice jsou diadicky racionální čísla (jsou tvaru $k/2^l$, $k\in\mathbb{Z}$, $l\in\mathbb{N}$), určete $\overline{M}$, M°, ∂M!

Cvičení 70: Připomeňme, že jestliže (P,ρ) je MP, nazývá se $x\in P$ *hromadný bod* M, jestliže pro všechna $r>0$ platí pro $B(x,r)=\{y\in P\,;\,\rho(x,y)<r\}$

$$B(x,r)\setminus\{x\}\neq\emptyset\,.$$

Určete množinu M' všech hromadných bodů $M\subset\mathbb{R}$, jestliže za M postupně volíme množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, (a,b), $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$. Jak lze charakterizovat uzavřenost M pomocí M'? Jakou vlastnost mají body z $M\setminus M'$?

Cvičení 71: Dokažte, že pro $M \subset (P, \rho)$ je

$$\overline{M} = \{x \in P\,;\, \mathrm{dist}(x, M) = 0\}\,!$$

Cvičení 72: Najděte v $\mathbb{R}^2$ disjunktní otevřené, resp. uzavřené množiny A, B, pro něž je $\mathrm{dist}(A, B) = 0$. Pokuste se najít tyto množiny tak, aby alespoň jedna byla omezená!

Cvičení 73: Pro metriky na $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y) &:= |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|\,, \quad \text{a} \\ \rho_2(x, y) &:= |x - y| \end{aligned}$$

najděte posloupnost $\{a_k\}$ tak, aby splňovala Cauchyho podmínku v právě jednom prostoru $(\mathbb{R}, \rho_1)$, $(\mathbb{R}, \rho_2)$! Má některý z prostorů „více“ otevřených podmnožin?

Cvičení 74: $(*)$ V ultrametrickém MP (ve kterém platí zesílená trojúhelníková nerovnost (4')) ukažte, že $B(x, r)$ a $B(y, r)$ jsou buď totožné nebo disjunktní! Jsou-li $B_1(x, r)$ a $B_2(y, r)$ disjunktními podmnožinami nějaké užavřené koule o poloměru r, je $\mathrm{dist}(B_1(x, r), B_2(y, r)) = r$!

Cvičení 75: Ukažte, že na součinu (S, ω) dvou MP (P, ρ) a $Q, \sigma)$ lze definovat ekvivalentní metriku pomocí „rovnosti $\omega = \sqrt{\rho^2 + \sigma^2}$“a také pomocí „rovnosti $\omega = \max(\rho, \sigma)$“! (Nejprve metriky korektněji popište!)

Cvičení 76: Najděte např. v prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ příklad množiny, která je omezená a přitom není totálně omezená!

Cvičení 77: Je funkce $x = \{x_k\} \mapsto \lim x_k$ spojitá na prostorech c_0, resp. c?

Cvičení 78: Najděte posloupnost funkcí $f_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ tak, aby její (bodová) limita $\lim f_k$ byla nespojitá funkce!

Cvičení 79: Můžeme v předcházejícím cvičení požadovat, aby množina bodů nespojitosti $N(f)$ byla předepsaná konečná množina K?

Cvičení 80: $(*)$ Můžeme požadovat, aby množina bodů nespojitosti $N(f)$ byla rovna $\mathbb{R}$? (Ano, ale pak již taková úloha nemá řešení – to je ale už trochu složitější).

Cvičení 81: Pro funkci $f : x \mapsto \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$ najděte příklady otevřených a uzavřených množin M, pro něž vzory $f^{-1}(M)$ nejsou otevřené a uzavřené množiny!

Cvičení 82: Vysvětlete souvislost předchozí úlohy s pojmem měřitelné funkce, zavedeným v TMAI!

Cvičení 83: Sestrojte dvě spočetné disjunktní podmnožiny $A, B \subset \mathbb{R}$ tak, aby byly husté v $\mathbb{R}$ Umíte najít takových množin více (konečně mnoho, nekonečně mnoho)?

Cvičení 84:$(*)$ Pro posloupnost

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big)$$

s $a > 0$ jsme nalezli kdysi dávno její limitu (připomeňte si!). Souvisí tento příklad nějak s kontraktivitou zobrazení?

Cvičení 85: $(*)$ Zkuste najít posloupnost polynomů, která bodově konverguje k funkci $x \mapsto |x|$. Umíte takovou posloupnost najít tak, aby k této funkci konvergovala *stejnoměrně*?