D.Ú.3 — k 18.5.2020

Uvažujte replikátorovou rovnici pro vězňovo dilemma s oplácející strategií a náhodnými mutacemi:

$$x' = (1-\theta)\frac{x}{4}(1-x-y)(5y-4x-4) + \theta(\frac{1}{3} - x)$$
$$x' = (1-\theta)\frac{y}{4}(1-x-y)(5y-4x-1) + \theta(\frac{1}{3} - y)$$

(i) Na přednášce byla ukázána existence stacionárních bodů $P = (0,0)$ a $Q = (0, 1/5)$, v případě bez mutací $\theta = 0$.

Vyšetřete pomocí VoIF, kam se tyto body posunou pro malé $\theta > 0$. Dokážete říci i něco o jejich stabilitě?

***(ii)** Pro $\theta = 0$ dále existuje stacionární segment $y = 1 - x$, $x \in [0, 1]$. Co se s ním stane pro $\theta > 0$ dosti malé? (Zajímá nás pouze dynamika v trojúhelníku $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z = 1 - x - y \geq 0$.)

Viz též nápověda na druhé straně.

(i) napišme rovnice ve tvaru $X' = F(X, \theta)$, kde $X = (x, y)$. Pomocí VoIF ukažte, že problém $F(X, \theta) = 0$ se lokálně redukuje na $X = \tilde{X}(\theta)$ a spočtěte $\tilde{X}'(0)$.
Vyjádřete příslušné matice linearizace $\nabla_X F(\tilde{X}(\theta), \theta))$ s chybou malé ó θ, odtud lze už dostat příslušné informace o spektru.
(ii) TRIK: pišme $z = 1 - x - y = u\theta$, kde u je pomocná proměnná. Zkrácením a limitou $\theta \to 0$ lze dostat kvadratickou rovnici. Pouze jeden z kořenů je pak relevantní (chceme $u > 0$ - proč?).