Obsah:

Důkazy:

Lemma 1
Věta 1 (∃! poz. řešení H.-T.)
Věta 2 (∃! Coulombovo tření)
Věta 3 (∃! Gaussého model)
Věta 4 (∃ „stabilní variety")
Lemma 3 (charakterizace $\beta(\cdot)$)
Věta 5 (∃ N.E.)
Věta 6 (von Neumann: Minimax)
Lemma 4 (ekv. definice ESS)
Věta 7 (∃! řešení (RD))
Věta 8 (stac. body (RD) vs. N.E.)
Věta 9 (ESS ⇒ asym. stab (RD))
Věta 10 (Fisher's fundamental Thm)
Lemma 5 (více o stac. bodech (RD))
Věta 11 (∄ stac. body pro (RD))

verze 9/7/2018

Lemma 1. Nechť funkce $p(t) : [0, +\infty) \to [0, 1]$ je podíl populace v čase t. Potom průměrný čas života jedince je roven $\int_0^\infty p(t)\, dt$.

Důsledek. Průměrná doba života jedince v modelu (1.2) je $1/h$.

Dk. buď $P(x) : [0,1] \to [0, +\infty)$ inverzní k $p(t)$

… zřejmě (Fubini) $\int_0^{+\infty} p(t)\,dt = \int_0^1 P(x)\,dx$

… leč zároveň P je náhodná veličina, udávající věk dožití v podílu populace $[0,1]$

… integrál = střední hodnota

Dk. důsl.: $p(t) = e^{-ht}$, tedy dle L1

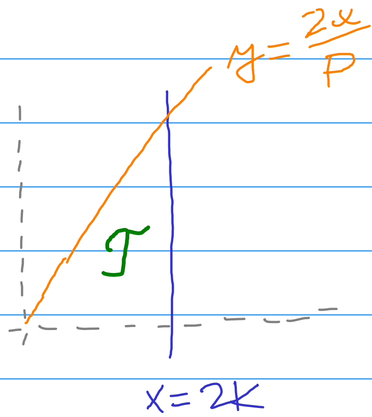
$\int_0^{+\infty} e^{-ht}\,dt = \frac{1}{h}$ … střední hodnota

$$x' = \left(r\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{my}{A+x} \right) \cdot x$$
$$y' = s\left(1 - \frac{Py}{x}\right) y$$

Věta 1. Pro každou počátení podmínku $x(0) > 0$, $y(0) > 0$ existuje právě jedno řešení, definované pro všechna $t \geq 0$. Toto řešení je omezené a má kladné složky.

Dk. 1) lokální $\exists$ & (glob.) jednoznačnost $\Leftarrow$ standardní ODR teorie (pravá strana C^1)

2)



$x' \leq -rx$ … pro $x \geq 2K$

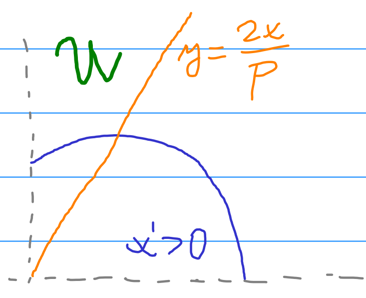
$y' \leq -sy$ … pro $y \geq \frac{2x}{P}$

$\Rightarrow$ řešení vstoupí do $\mathcal{T}$ v konečném čase

Spec.: je omezené

3) $y(t) > 0$ z jednoznačnosti … neboť $y \equiv 0$ je speciální případ řešení

a proč je $x(t) > 0$?



… stačí pohlídat řešení v $\mathcal{W}$

… zde však $y' \leq -sy$, leč $x' \geq -cx$

$\Rightarrow$ v konečném čase řešení klesne pod ⌒, a nedosáhne $x = 0$

Věta 2. Pro každé $T > 0$, $h(t) \in L^2(0,T)$ a x_0, $v_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení (1.12–1.13), splňující počáteční podmínky $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$.

Poznámka. Snadnou modifikací důkazu máme týž výsledek pro obecnější model $mx'' + F - \gamma(x') + \sigma(x) = h(t)$, kde $\gamma(x')$ je relaxační funkce a $\sigma(x)$ je síla pružiny.

Dk. pro modifikovaný systém, kde $\gamma(y), \sigma(x)$ jsou globálně lipschitzovské

buď x_1, F_1 a x_2, F_2 řešení,

označme $\tilde{x} = x_1 - x_2$

$\tilde{x}' = x_1' - x_2'$ ..... odečtu rovnice & násobím $\tilde{x}' = x_1' - x_2'$

(standardní trik)

$$\underbrace{m\tilde{x}''}_{(1)} + \underbrace{F_1 - F_2}_{(2)} + \underbrace{\sigma(x_1) - \sigma(x_2)}_{(3)} = \underbrace{\gamma(x_1') - \gamma(x_2')}_{(4)} \quad / \cdot \tilde{x}'$$

ad 1) $m\tilde{x}'' \cdot \tilde{x}' = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\tilde{x}')^2$

ad 2) $(F_1 - F_2)(x_1' - x_2') \geq 0$ neboť $(x_i', F_i) \in C$ monotónní

ad 3) TRIK piš $\sigma(x) = x + s(x)$ ← stále lipschitzovské

$$(\sigma(x_1) - \sigma(x_2)) \cdot (x_1' - x_2') = (\tilde{x} + s(x_1) - s(x_2)) \cdot \tilde{x}'$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \tilde{x}^2 + P_3 \quad \text{kde } |P_3| = |s(x_1) - s(x_2)| \cdot |\tilde{x}'|$$

$$\leq C_s |\tilde{x}||\tilde{x}'| \leq \frac{C_s}{2}\left(\tilde{x}^2 + (\tilde{x}')^2\right)$$

ad 4) $|\gamma(x_1') - \gamma(x_2')| \cdot |x_1' - x_2'| \leq C_\gamma (\tilde{x}')^2$

CELKEM: $\frac{d}{dt} \frac{1}{2}\left(m(\tilde{x}')^2 + (\tilde{x})^2\right) \leq \left(\frac{C_s}{2} + C_\gamma\right)(\tilde{x}')^2 + \frac{C_s}{2}(\tilde{x})^2$

označme $E = E(t) = \frac{1}{2} m (\tilde{x}'(t))^2 + \frac{1}{2}(\tilde{x}(t))^2$

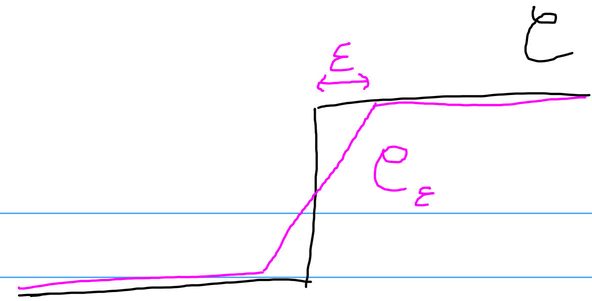
$\Rightarrow$ $\frac{d}{dt} E(t) \leq C \cdot E(t)$

$$\boxed{E(t) \leq e^{Ct} \cdot E(0)} \quad \Rightarrow \text{ jednoznačnost}$$

$\forall t \geq 0$

(řešení shodná v čase t právě když $E(t) = 0$)

ad ∃--e: aproximační úloha:



$(x', F) \in e_\varepsilon$

$\Updownarrow$

$F = g_\varepsilon(x')$

kde $g_\varepsilon(\cdot)$ je lipsch. fce

$\Rightarrow$ ∃--e řešení via Picard

$\varepsilon \to 0+$, limitní přechod....

Věta 3. Pro každé x_0 a $y_0 > 0$ existuje právě jedno řešení Gauseho modelu, splňující $x(0) = x_0$ a $y(0) = y_0$.

Dk. ∃--e $\Leftarrow$ slepování řešení mimo $x = x_s$ (∃ dle klasické teorie)

jednozn.: argument monotonie (srov V.2)

buď $(x_1, y_1, \varphi_1), (x_2, y_2, \varphi_2)$ ... dvě řešení, označ $\tilde{x} = x_2 - x_1$

$\tilde{y} = y_2 - y_1$

$\tilde{\varphi} = \varphi_2 - \varphi_1$

$\tilde{z} = z_2 - z_1$

TRIK: pomocná prom. $z = ex + y$

$$z' + hz = kx, \quad \text{kde } k = e(r+h)$$
$$x' + y\varphi = rx$$

odečtu rovnice pro $z_{1,2}, x_{1,2}$

+ rozepíšu: $y_2\varphi_2 - y_1\varphi_1 = y_2(\varphi_2 - \varphi_1) + \varphi_1(y_2 - y_1)$

$\Downarrow$

$$\tilde{z}' + h\tilde{z} = k\tilde{x} \qquad \Big|\cdot 2\tilde{z}$$
$$\tilde{x}' + y_2\tilde{\varphi} = -\varphi_1\tilde{y} = \varphi_1(\tilde{z} - e\tilde{x}) \qquad \Big|\cdot 2\tilde{x}$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{z}^2 + \tilde{x}^2\right) + \underbrace{2h(\tilde{z})^2}_{\geq 0} + \underbrace{2y_2\tilde{\varphi}\tilde{x}}_{\geq 0} = \underbrace{(2k + \varphi_1)\tilde{x}\tilde{z} - \varphi_1 e(\tilde{x})^2}_{\leq c(\tilde{z}^2 + \tilde{x}^2)}$$

... Young, Gronwall ....

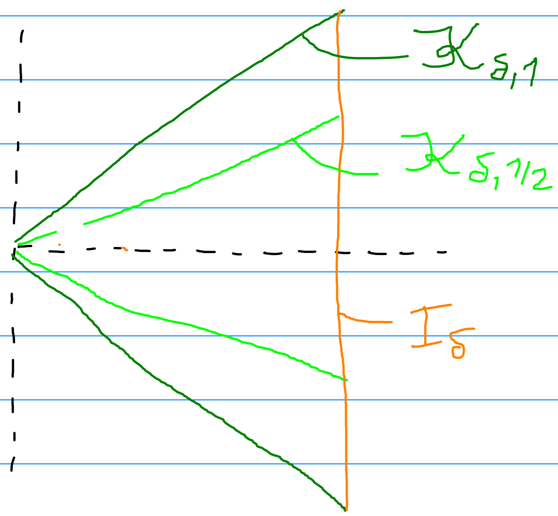
Věta 4. Je dána rovnice $X' = F(X)$, kde $X \in \mathbb{R}^n$. Nechť X_0 je stacionární bod a $F \in C^1(\mathcal{U}(X_0))$. Označme $A = \nabla_X F(X_0)$. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$ je záporné, jednoduché vlastní číslo. Potom v $\mathcal{U}(X_0)$ existují řešení, splňující

$$X(t) \sim X_0 + e^{\lambda t} v, \qquad t \to +\infty \tag{3.6}$$

Dk

jen pro $n=2$, $\sigma(A) = \{\pm 1\}$, BÚNO $v_{1,2} = (0,1), (1,0)$

$$\hookrightarrow \quad \begin{aligned} x' &= -x + f(x,y) \\ y' &= y + g(x,y) \end{aligned} \qquad \text{kde } |f(x,y)|, |g(x,y)| = o(|x|+|y|) \quad (x,y) \to (0,0)$$



Definuji:

$$\mathcal{K}_{\delta,\theta} = \{0 < x < \delta,\ |y| \le \theta |x|\}$$

$$I_\delta = \{x = \delta,\ |y| \le \delta\}$$

$\delta > 0$ malé $\Rightarrow |f(x,y)|, |g(x,y)| \le \eta\,(|x|+|y|)$ $\quad \forall (x,y) \in \mathcal{K}_{\delta,1}$

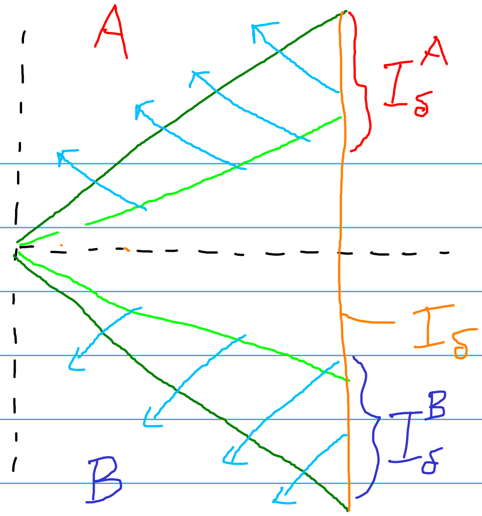
$$\Rightarrow\ x' \le -x + \eta\,(|x| + \underbrace{|y|}_{\le |x| = x}) \le (-1+2\eta)\,x$$

$\Rightarrow$ $x(t) \to 0$ exp. rychle

dále pak: $(x,y) \in \mathcal{K}_{\delta,1} \setminus \mathcal{K}_{\delta,\frac{1}{2}} \Rightarrow |y| \ge |x|$

$$\Rightarrow\ y' = y + \underbrace{g(x,y)}_{|\ | \le \eta(|x|+|y|) \le 2\eta|y|} = (1 + O(\eta))\,y$$

$\Rightarrow$ $|y|$ roste exp. rychle
(vzdaluje se od osy $y=0$)



směr pohybu řešení vně $\mathcal{K}_{\delta,\frac{1}{2}}$

Dále definuji: $A = \{ 0 < x < y \}$

$B = \{ 0 < x < -y \}$

$I_\delta^A = \{ (x_0, y_0) \in I_\delta$, řešení s poč. podm. (x_0, y_0) skončí v $A \}$

$I_\delta^A = \{$ — " — " — " — " — " — " v $B \}$

„zřejmě" (z odhadů výše a vlastností řešící funkce)

- $I_\delta^A \cap I_\delta^B = \emptyset$, $I_\delta^A \neq \emptyset$, $I_\delta^B \neq \emptyset$

  (horní resp. dolní čtvrtina I_δ)

- I_δ^A, I_δ^B otevřené intervaly

  (spojitost resp. monotonie řešící funkce)

Lemma 2 $\Rightarrow$ $\exists (x_0, y_0) \in I_\delta \setminus (I_\delta^A \cup I_\delta^B)$

řešení s poč. podm. (x_0, y_0) nutně zůstane v $\mathcal{K}_{\delta,\frac{1}{2}}$ $\forall t > 0$

Dále „zjevně":
- toto řešení $\to (0,0)$ exp. rychle
- je jediné (až na posun v čase)
- je tečné k $(0,1)$, tj. $y/x \to 0$

Lemma 3. Platí $p \in \beta_1(q)$ právě když $e^k \in \beta_1(q)$ pro každé $k \in C(p)$. Speciálně existuje nejlepší odpověď v čistých strategiích.

Dk. $\Leftarrow$ ihned ze vzorce $\pi_1(p,q) = \sum_{k \in C(p)} p_k \pi_1(e^{(k)}, q)$

$\Rightarrow$ nechť $p \in \beta_1(q)$, tedy

$$0 = \pi_1(p,q) - \pi_1(p,q) = \sum_k p_k$$

$$= \sum_k p_k \underbrace{\left[\pi_1(e^{(k)}, q) - \pi_1(p,q)\right]}_{\leq 0 \text{ neboť } p \in \beta_1(q)}$$

$\Rightarrow$ nutně všechny sčítance 0

a tedy $k \in C(p) \Rightarrow p_k > 0 \Rightarrow [\ldots] = 0$,

neboli $e^{(k)} \in \beta_1(q)$

Věta 5. Každá hra má alespoň jedno Nashovo ekvilibrium.

Dk. pomocná funkce $\Phi: \Delta_1 \times \Delta_2 \to \Delta_1 \times \Delta_2$

$$(p, q) \mapsto (\Phi^1, \Phi^2)$$

... kde $\Phi^1_k = \dfrac{p_k + \gamma^1_k(p,q)}{1 + \sum_{k'} \gamma^1_{k'}(p,q)}$, $\gamma^1_k = \max\{0, \pi_1(e^{(k)}, q) - \pi_1(p,q)\}$ $(k = 1 \dots m)$

$\Phi^2_\ell = \dfrac{q_\ell + \gamma^2_\ell(p,q)}{1 + \sum_{\ell'} \gamma^2_{\ell'}(p,q)}$, $\gamma^2_\ell = \max\{0, \pi_2(p, e^{(\ell)}) - \pi_2(p,q)\}$ $(\ell = 1, \dots, n)$

zřejmě: $\gamma^1_k > 0 \Leftrightarrow e^{(k)}$ je lepší odpověď (1. hráče) na q než p

speciálně: (Lemma 3) $p \in \beta_1(q) \Leftrightarrow \gamma^1_k(p,q) = 0$ pro $\forall k = 1 \dots m$

(podobně pro 2. hráče)

Plán důkazu: 1 $\exists (p,q)$ pevný bod Φ

2 (p,q) je p.b. $\Leftrightarrow$ je NE

ad 1) Brouwerova věta (pro $\mathbb{R}^{m+n-2}$)

... zjevně Φ spojité, do $\Delta_1 \times \Delta_2$

... Δ_1 homeomorfní kouli v $\mathbb{R}^{m-1}$

ad 2) $\Leftarrow$ ihned z pozorování výše

neboť $\gamma^{1,2}_{k,\ell} = 0$ pro NE, tedy $\Phi^1 = p$, $\Phi^2 = q$

$(p \in \beta_1(q), q \in \beta_2(p))$

$\Rightarrow$ nechť (p,q) je pevný bod .... ukážeme, že $p \in \beta_1(q)$

$q \in \beta_2(p)$

?? $p \notin \beta_1(q)$ .... (L3) .... $\exists k'$ t.ž. $g_k^1(p,q) > 0$

upravujeme: $$p_k = \Phi_k^1 = \frac{p_k + g_k^1(p,q)}{1 + \underbrace{\sum_{k'} g_{k'}^1(p,q)}_{>0}}$$

$$p_k = \frac{g_k^1(p,q)}{\sum_{k'} g_{k'}^1(p,q)}$$

odtud speciálně $g_k^1(p,q) = \pi_1(e^{(k)},q) - \pi(p,q) > 0$

pro $\forall k \in C(p)$

leč pak:

$$\pi_1(p,q) = \sum_{k \in C(p)} p_k \pi_1(e^{(k)},q) > \sum_{k \in C(p)} p_k \pi_1(p,q) = \pi_1(p,q)$$

$\lightning$

Lemma 4. Populace x je ESS právě když x je NE a navíc pro každé $y \in \beta(x)$, $y \neq x$ je $\pi(y,y) < \pi(x,y)$.

Dk. x je ESS $\iff$ $\pi(x-y, (1-\varepsilon)x+\varepsilon y) > 0$ $\forall y \neq x$, $\varepsilon > 0$ malé

... úpravy - bilinearita $\pi(\cdot,\cdot)$

$$\underbrace{\pi(x-y,x)}_{A} - \varepsilon \underbrace{\pi(x-y,x-y)}_{B} > 0$$

elementární úvaha: $A - \varepsilon B > 0$ $\forall \varepsilon > 0$ malé $\iff$ $A > 0$ nebo $A = 0$, $B < 0$

$\Downarrow$

ESS je: buď $A > 0$ .... $\pi(x,x) > \pi(y,x)$, neboli $y \notin \beta(x)$

(neboť x je NE, tj. $x \in \beta(x)$)

nebo $A = 0$ ... $\pi(x,x) = \pi(y,x)$

$B < 0$ ... $\pi(x-y, x-y) < 0$

$$\underbrace{\pi(x,x) - \pi(y,x)}_{=A=0} \underbrace{- \pi(x,y) + \pi(y,y)}_{\Downarrow} < 0$$

$\pi(y,y) < \pi(x,y)$ ∎

Pozn.: navíc máme ESS $\iff$ $\forall y \neq x$, blízké x: $\pi(y,y) < \pi(x,y)$

Věta 6. Nechť A je hra s nulovým součtem. Potom:

1. $v_1(A) = v_2(A)$
2. dvojice strategií (p^*, q^*) tvoří N.e. hry $(A, -A)$, právě když p^* je optimální pro prvního hráče a zároveň q^* je optimální pro druhého hráče.

Dk. ad 1) $\leq$ je snazší: buďte $p', q' \in \Delta_{1,2}$ libovolné, pevné

$$\left.\begin{array}{l} p' \cdot Aq' \geq \min_q p' \cdot Aq = v_1(p', A) \\ p' \cdot Aq' \leq \max_p p \cdot Aq' = v_2(q', A) \end{array}\right\} \Longrightarrow v_1(p', A) \leq v_2(q', A) \quad \Big/ \begin{array}{l} \sup p' \\ \inf q' \end{array}$$

$$\boxed{v_1(A) \leq v_2(A)}$$

obrácená nerovnost: buď (p^*, q^*) NE hry $(A, -A)$ $\Leftarrow$ $\exists$ dle Věty 5

pozoruji: $(*)$

$$p^* \in \beta(q^*) \Longleftrightarrow p^* \cdot Aq^* = v_2(q^*, A)$$
$$q^* \in \beta(p^*) \Longleftrightarrow p^* \cdot Aq^* = v_1(p^*, A)$$

$$\Longrightarrow \quad v_2(q^*, A) = v_1(p^*, A) \qquad \text{leč } PS \leq v_1(A), \; LS \geq v_2(A)$$

ad 2) nechť (p^*, q^*) je NE .... dle pozorování $(*)$ výše je

$$v_2(A) \underset{(i)}{\leq} v_2(q^*, A) = p^* \cdot Aq^* = v_1(p^*, A) \underset{(ii)}{\leq} v_1(A)$$

dle 1) $v_1(A) = v_2(A)$, tedy (i), (ii) jsou „=" ... tj. p^*, q^* optimální

obráceně: jsou-li p^*, q^* optimální, pak

$$v_1(A) = v_1(p^*, A) = \min_q p^* \cdot Aq \leq p^* \cdot Aq^*$$

$$v_2(A) = v_2(q^*, A) = \max_p p \cdot Aq^* \geq p^* \cdot Aq^*$$

leč dle 1) víme $v_1(A) = v_2(A)$ $\Longrightarrow$ všude platí „="

dle pozorování $(*)$

p^*, q^* jsou vzájemně nejlepší odpovědi

Věta 7. Pro každou počáteční podmínku z Δ existuje právě jedno řešení $x(t)$ replikátorové rovnice, definované a splňující $x(t) \in \Delta$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.
Dále: nosič populace $C(x(t))$ a tedy speciálně hranice, hrany, vrcholy a vnitřek Δ jsou invariantní vůči replikátorové dynamice.

Dk. lokální $\exists$ & (glob.) jednoznačnost $\Leftarrow$ standardní ODR teorie (pravá strana C^1)

lze psát: $x_i' = a_i(t) x_i$, kde $a_i(t) = \pi_i(x(t)) - \pi(x(t))$

$$\Rightarrow x_i(t) = x_i(0) \cdot \underbrace{\exp\left(\int_0^t a_i(s)\,ds\right)}_{>0}$$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(x_i(t)) \equiv$ konst, speciálně invariance hranice, stěn, vrcholů...

? $x(t) \in \Delta \ \forall t \geq 0$ .... $x_i(t) \geq 0$ již víme, zbývá $\underbrace{\sum_i x_i(t)}_{=:y(t)} = 1$

TRIK: označ $y(t)$

$$y' = \sum_i x_i' = \sum_i x_i \pi_i(x) - x_i \pi(x)$$

$$= \pi(x) \cdot (1 - y)$$

jednoznačnost $\Rightarrow y(t) \equiv y(0) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Věta 8. Pro replikátorovou dynamiku platí:

1. $\tilde{x}$ je NE $\implies$ $\tilde{x}$ je stacionární bod
2. $\tilde{x}$ je stabilní stacionární bod $\implies$ $\tilde{x}$ je NE

Dk. 1) $\tilde{x}$ je NE $\Rightarrow$ $\tilde{x}_i = 0$ $\boxed{\text{nebo}}$ $\tilde{x}_i > 0 \overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow} e^i \in \beta(\tilde{x})$, tj. $\pi(e^i, \tilde{x}) = \pi(\tilde{x}, \tilde{x})$

$\pi_i(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x})$

$\tilde{x}$ stac. bod

2) obratem: $\tilde{x}$ není NE $\underset{L.3}{\Longrightarrow}$ $\exists j$ t.ž. $\pi_j(\tilde{x}) > \pi(\tilde{x})$

a tedy $\pi_j(x) - \pi(x) \geq \alpha > 0$ na jistém $\mathcal{U}(\tilde{x}, \delta)$

... vol $x(0) \in \mathcal{U}(\tilde{x})$, $x_j(0) > 0$

$\Rightarrow x_j' \geq x_j \cdot \alpha$

$\underbrace{x_j(t) \geq x_j(0) \cdot e^{\alpha t}}$ na $\mathcal{U}(\tilde{x}, \delta)$

$\Rightarrow$ nestabilita

Věta 9. Pokud $\bar{x}$ je ESS, pak $\bar{x}$ je asymptoticky stabilní stacionární bod pro replikátorovou dynamiku.

Dk. polož $H(y) = \sum_{i \in C(\tilde{x})} \tilde{x}_i \ln\left(\frac{\tilde{x}_i}{y_i}\right)$, $y \in Q_{\tilde{x}} = \{y \in \Delta, C(\tilde{x}) \subseteq C(y)\}$

(← okolí $\tilde{x}$ vůči Δ)

plán ... 1) $H(\tilde{x}) = 0$, $H(y) > 0$ pro $\forall y \in Q_{\tilde{x}} \setminus \{\tilde{x}\}$

2) $\frac{d}{dt} H(y(t)) < 0$ pro $\forall y(t)$ řešení (RD) blízké, leč různé od $\tilde{x}$

$\Rightarrow$ závěr (Ljapunovova věta)

ad 1) $H(y)$ má smysl na $Q_{\tilde{x}}$, $H(\tilde{x}) = 0$ .... zjevné

dále užiji ryzí konkávnost ln

$$\ln\left(\sum_i \lambda_i \xi_i\right) \geq \sum_i \lambda_i \ln(\xi_i)$$

pro $\forall \xi_i \in (0, +\infty)$; $\lambda_i \in [0,1]$, $\sum_i \lambda_i = 1$

ryzí: platí $>$ pokud ξ_i ne $\forall$ stejná

$$H(y) = -\sum_{i \in C(\tilde{x})} \tilde{x}_i \ln\left(\frac{y_i}{\tilde{x}_i}\right) \overset{(i)}{\geq} -\ln\left(\sum_{i \in C(\tilde{x})} y_i\right) \overset{(ii)}{\geq} -\ln\Big(\underbrace{\sum_{i \in C(y)} y_i}_{=1}\Big) = 0$$

(i) $\Leftarrow$ konkávn. ln, $\xi_i = \frac{y_i}{\tilde{x}_i}$, $\lambda_i = \tilde{x}_i$

pro $y \neq \tilde{x}$ je buď $C(\tilde{x}) \subsetneqq C(y)$ $\Rightarrow$ (ii) ostrá

nebo $C(\tilde{x}) = C(y)$, tedy $\xi_i = \frac{y_i}{\tilde{x}_i}$ ne stejné

$\Rightarrow$ (i) ostrá

ad 2) počítejme pro $y(t)$ řešení (RD)

$$\frac{d}{dt} H(y(t)) = \sum_{i \in C(\tilde{x})} \frac{\partial H}{\partial x_i}(y(t))\, y_i'(t) = -\sum_{i \in C(\tilde{x})} \frac{\tilde{x}_i}{\cancel{y_i(t)}} \cdot \cancel{y_i}(t)\left[\pi_i(y(t)) - \pi(y(t))\right]$$

$$= \pi(y(t)) - \pi(\tilde{x}, y(t))$$

zbývá ukázat: $\tilde{x}$ je ESS $\Longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\pi(y,y)<\pi(\tilde{x},y) \\ \text{pro } \forall y \neq \tilde{x}, \text{ blízké}\end{array}\right\}$ (*)

L.4 $\Rightarrow$ $\forall y \neq \tilde{x}$, $y \in \beta(\tilde{x})$: $\pi(y,y)<\pi(\tilde{x},y)$ platí

zbývá $y \notin \beta(\tilde{x})$, tj. $\pi(y,\tilde{x})<\pi(\tilde{x},\tilde{x})$

$\pi(y-\tilde{x},\tilde{x})<0$ (**)

pišme

$$\pi(y-\tilde{x},y)=\underbrace{\underbrace{\pi(y-\tilde{x},\tilde{x})}_{<0 \text{ lineární}}+\underbrace{\pi(y-\tilde{x},y-\tilde{x})}_{\text{kvadratické}}}_{\text{vůči } y-\tilde{x}} \underbrace{<0}_{\text{pro } y-\tilde{x} \text{ malé}}$$

$\Downarrow$

(*) o.k.

Věta 10. [Základní věta přírodního výběru.] Nechť matice A je symetrická. Potom pro (RD) platí $\frac{d}{dt}\pi(x(t)) \geq 0$, přičemž rovnost nastává právě ve stacionárních bodech.

Dk. buď $x = x(t)$ řešení (RD), $\pi(x) = x \cdot Ax$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\pi(x) = x' \cdot Ax + \underbrace{x \cdot Ax'}_{= A^T x \cdot x' = x' \cdot Ax \text{ (symetrie } A)} = 2x' \cdot Ax$$

(rozpíšu po složkách)

$$= \sum_i 2x_i' \underbrace{(Ax)_i}_{= \pi_i(x)} = 2\sum_i x_i (\pi_i(x) - \pi(x))\, \pi_i(x)$$

$$= \sum_i x_i \pi_i^2(x) - x_i \pi_i(x)\pi(x) + \underbrace{\sum_i x_i \pi^2(x) - x_i \pi_i(x)\pi(x)}_{= 0 \text{ neboť } \pi(x) = \sum_i x_i \pi_i(x)}$$

$$= \sum_i x_i \left(\pi_i^2 - 2\pi_i(x)\pi(x) + \pi^2(x)\right)$$

$$= \sum_i \underbrace{x_i (\pi_i(x) - \pi(x))^2}_{}$$

≥ 0, navíc $= 0 \iff x_i = 0 \vee \pi_i(x) = x$,

tj. stac bod (RD)

Lemma 5. Pro rovnice (RD) platí:

1. $\tilde{x} \in \operatorname{int}\Delta$ je stacionární bod, právě když $\pi_i(\tilde{x})$ nezávisí na i.
2. pokud $\tilde{x}, \tilde{y} \in \operatorname{int}\Delta$ jsou stacionární, pak je stacionární také konvexní kombinace $t\tilde{x} + (1-t)\tilde{y}$, $t \in (0,1)$.
3. pokud $\operatorname{int}\Delta$ obsahuje periodický orbit, obsahuje též stacionární bod

Dk. 1. uvaž: $\tilde{x}$ stac. bod $\Leftrightarrow$ $\tilde{x}_i(\pi_i(\tilde{x}) - \pi(\tilde{x})) = 0 \ \forall i$

$\Rightarrow$ navíc vnitřní....

... $\tilde{x}_i > 0$, tedy $\pi_i(\tilde{x}) = \underbrace{\pi(\tilde{x})}_{}$ $\forall i$

nezávisí na i

$\Leftarrow$ nechť $\tilde{x}_i > 0$, navíc $\pi_i(\tilde{x}) = c \ \forall i$

$$\ldots \pi(\tilde{x}) = \sum_i \tilde{x}_i \pi_i(\tilde{x}) = \underbrace{\left(\sum_i \tilde{x}_i\right)}_{\text{"}1\text{"}} \cdot c = c$$

$\Rightarrow \pi_i(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x}) \ \forall i$

stac. bod

2. označ $z = t\tilde{x} + (1-t)\tilde{y}$, $t \in (0,1)$

$$\ldots \pi_i(z) = t\underbrace{\pi_i(\tilde{x})}_{} + (1-t)\underbrace{\pi_i(\tilde{y})}_{}$$

nezávisí na i (dle 1)

$\Rightarrow \pi_i(z)$ ... nezávisí na i ... opět –"–

3. buď $x(t): [0,T] \to \operatorname{int}\Delta$ periodické řešení

$$\text{(RD)} \Rightarrow \frac{x_i'(t)}{x_i(t)} = \pi_i(x(t)) - \pi(x(t)) \qquad \int_0^T dt$$

(přírůstek logaritmu) $\quad 0 = \pi_i(\tilde{x}) - c \quad$ kde $\tilde{x} = \int_0^T x(t)dt \in \operatorname{int}\Delta$

$$c = \int_0^T \pi(x(t))dt$$

$\Rightarrow \tilde{x}$ je stac. dle 1

Věta 11. Označme $u = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Pokud složky $(\operatorname{adj} A)u$ nejsou téhož znamení, pak rovnice (RD) nemá ve vnitřku Δ stacionární body ani periodické orbity.

Dk. Lemma 5 $\Rightarrow$ stačí vyloučit stac. bod

?? buď $\tilde{x} \in \operatorname{int} \Delta$ stacionární … L5 $\Rightarrow$ $\pi_i(\tilde{x}) = (A\tilde{x})_i = \alpha$

tj. $A\tilde{x} = \alpha u$ (*)

kde $u = (1, \cdots 1)^T$

(i) případ A regulární …

$$(*) \Rightarrow \underbrace{\tilde{x}}_{\text{kladné složky}} = \alpha A^{-1} u = \underbrace{\frac{\alpha}{\det A}}_{\text{skalár}} \underbrace{(\operatorname{adj} A) u}_{\text{různá znamení}} \quad \lightning$$

(ii) A singulární … nutně $h(A) = n-1$ … (neboť $\operatorname{adj} A \neq 0$)

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A = 1$

pomocný výpočet: $$\pi(\tilde{x}) \underbrace{(\operatorname{adj} A) u}_{\neq 0} = (\operatorname{adj} A) \pi(\tilde{x}) u \overset{(*)}{=} (\operatorname{adj} A) A \tilde{x} = \underbrace{(\det A)}_{=0} \tilde{x}$$

$\Rightarrow \pi(\tilde{x}) = 0$, tj. $\tilde{x} \in \operatorname{Ker} A$

opět dle (*)

leč dále: $A(\operatorname{adj} A) = (\det A) I = 0 \Rightarrow$ sloupce $(\operatorname{adj} A)$, spec. $(\operatorname{adj} A) u \in \operatorname{Ker} A$

víme konečně: $\dim \operatorname{Ker} A = 1$, odtud $\tilde{x} = \underbrace{\beta}_{\text{skalár}} (\operatorname{adj} A) u$

$\lightning$ jako výše