$$\frac{d}{dt} u = F(u) \qquad (1)$$

$u(0) = u_0 \in X$, $\dim X = \infty$

$u(t) : \langle 0, T\rangle \to X$

asymptotické chování ($t \to \infty$)

1) Lorenzovy rovnice (3×3 ODR)

2) Navier – Stokesovy rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \Delta u + \nabla p = f$$

u … rychlost proudění
p … tlak
f … vnější síla

Sobolev, Bochner

<u>Definice</u>. Dynamický systém $(S(t), X)$; X… bázový prostor
X… Banach (nebo jeho uz. podmnožina)
$S(t) : X \to X$ (nelineární) operátory; $t \geq 0$

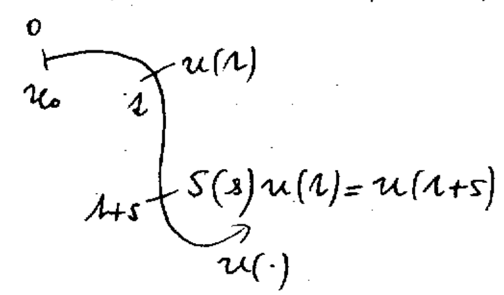
$$\left.\begin{array}{l}\text{(i) } S(0) = I \\ \text{(ii) } S(t)S(s) = S(t+s)\end{array}\right\} \text{vlastnost semigrupy}$$

(iii) $(t, u) \longmapsto S(t)u$ je spojité

<u>Příklad</u>. Rovnice (1), nechť pro $\forall t$, $\forall u_0 \in X$ $\exists !$ „řešení"
$u(t) : \langle 0, t\rangle \to X$

řešící semigrupa (operátor řešení)

$S(t)u_0 := u(t)$; $u(\cdot)$ je odp. „řešení" (1)



Příklad. 1) $\frac{d}{dt}u = Au$, $u\in\mathbb{R}^n$

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ konst. matice

$$S(t)u_0 = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}}_{e^{tA}}u_0$$

2) $\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u$ $u(t,x)$; $t\ge 0$; $x\in(0,\pi)$

$u(0,x)=u_0(x)$ $X=L^2(0,\pi)$; $\varphi_k(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)$; $k=1,2,\dots$

ON báze Hilberta

$$u(t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-k^2t}\varphi_k \; ; \quad u_0=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k \quad \left(a_k=\int_0^{\pi}u_0(x)\varphi_k(x)\,dx\right)$$

$\cap$

X

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-k^2t}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)$$

Definice. (ω-limitní množina.)

$(S(t),X)$, $B\subset X$.

$\omega(B):=\{y\in X;\ \exists t_n\to\infty,\ x_n\in B$ tak, že $S(t_n)x_n\to y\}$

Lemma 1. $\omega(B)=\bigcap_{t>0}\overline{\bigcup_{s>t}S(s)B}$

Důkaz. „$\subset$": $y\in\omega(B)$ ... $y=\lim_{n\to\infty}S(t_n)x_n$, $t_n\to\infty$, $x_n\in B$

$t>0$ lib. pevné: $t_n>t$, $n\ge n_0$

$S(t_n)x_n\in\bigcup_{s>t}S(s)B$, $n\ge n_0$

$\downarrow$

$y\in\overline{\bigcup_{s>t}S(s)B}$; $t>0$ lib. $\Rightarrow y\in$ pravá strana.

„$\supset$": $y\in$ pravá strana:

$y\in\overline{\bigcup_{s>n}S(s)B}$; $n=1,2,\dots$

$\exists z_n\in\bigcup_{s>n}S(s)B$: $\|z_n-y\|<\frac{1}{n}$

$z_n=S(t_n)x_n$; $x_n\in B$, $t_n>n$

$S(t_n)x_n-y=z_n-y\xrightarrow{n\to\infty}0\Rightarrow y\in\omega(B)$. $\square$

Poznámka. $y\notin\omega(B)\Rightarrow\exists t>0: y\notin\overline{\bigcup_{s>t}S(s)B}\Rightarrow$

$\Rightarrow\mathcal{U}(y,\varepsilon)\cap S(s)B=\emptyset\ \forall s>t$

Definice. $N\subset X$ se nazve

pozitivně invariantní : $S(t)N\subset N$ $\forall t>0$;

negativně ″ : $S(t)N\supset N$ $\forall t>0$;

úplně ″ : $S(t)N=N$ $\forall t>0$.

Věta 1. $(S(t),X)$, $B\subset X$ pozitivně invariantní.

1) $\omega(B)$ je uzavřená a poz. invariantní;

2) Pokud navíc platí: $\forall t_n\to\infty$; $x_n\in B$ má $S(t_n)x_n$ hromadný bod (vlastnost asymptotické kompaktnosti), potom $\omega(B)\ne\emptyset$ a negativně invariantní a je-li B souvislá, je $\omega(B)$ také souvislá.

Důkaz. 1) uzavřenost: Lemma 1.

invariance: $y\in\omega(B)$, $\exists x_n\in B$: $S(t_n)x_n\to y$, $t_n\to\infty$, $t>0$ pevné.

$$S(t_n+t)x_n=S(t)(S(t_n)x_n)\to S(t)y\in\omega(B)$$

$\| \; S(t_n')x_n$, $t_n'\to\infty$; $S(t_n)x_n\to y$

$$S(t_n)x_n=S(t)(S(t_n-t)x_n)$$

$\downarrow y$; $t_n>t$ ... $n\ge n_0$; AK ... pro podposloupnost $\downarrow z\in\omega(B)$

2) $\omega(B)\ne\emptyset$

souvislá: sporem: $\omega(B)=F_1\cup F_2$; $\overline{F_1}\cap F_2=\emptyset$, $F_1\cap\overline{F_2}=\emptyset$,

$F_1\ne\emptyset\ne F_2\Rightarrow\overline{F_1},\overline{F_2}$ uz.

$\overline{\omega(B)}=\overline{F_1\cup F_2}=\overline{F_1}\cup\overline{F_2}=F_1\cup F_2\Rightarrow\overline{F_1}=F_1,\ \overline{F_2}=F_2$

$\overline{\omega(B)} = \omega(B)$

$\Rightarrow\exists\ G_1,G_2$ ot., disj., $F_i\subset G_i$

$S(s)B$ ... souvislá

Tvrdíme : $S(t)B \cap G_i \neq \emptyset \ \forall t>0,\ i=1,2$.

Kdyby $S(t)B \cap G_1 = \emptyset \Rightarrow S(s)B = \left[S(t)S(s-t)B \subset S(t)B\right] \Rightarrow$ $\quad s>t$

$\Rightarrow \overline{\bigcup_{s>t} S(s)B} \cap G_1 = \emptyset \overset{\text{L.1.}}{\Rightarrow} G_1 \cap \omega(B) = \emptyset$ ↯.

Odtud : $S(t)B \setminus (G_1 \cup G_2) \neq \emptyset \ \forall t>0$

$\exists t_n \to \infty$

$x_n \in B$ ... $S(t_n)x_n \notin G_1$ a G_2

AK ... Búno : $S(t_n)x_n \to y \in \omega(B)$

$y \notin G_1 \cup G_2$ ↯. □

Definice. $(S(t), X)$ se nazve disipativní, pokud $\exists W \subset X$ omezené tak, že $\forall B \subset X$ omezené $\exists t_0 \ldots S(t)B \subset W$ pro $\forall t > t_0$.

Poznámka. W je uniformně pohlcující.

Búno W uzavřená, pozitivně invariantní.

W omez. .. $\exists t_1 \cdots S(t)W \subset W \ldots t>t_1$

$\hat{W} := \overline{\bigcup_{t>t_1} S(t)W}$

Definice. $(S(t), X)$ se nazve asymptoticky kompaktní, pokud platí:

$$\left.\begin{array}{l} t_n \to \infty \\ \{x_n\} \subset X \text{ omezená} \end{array}\right\} \Rightarrow S(t_n)x_n \text{ má hromadný bod v } X. \qquad (AK)$$

Poznámka. $\dim X < \infty \Rightarrow [\text{disipativita} \Leftrightarrow (AK)]$.

Definice. $b \in X;\ A, B \subset X$. $\operatorname{dist}(b, A) := \inf_{a\in A} \|b-a\|$;

$$\operatorname{dist}(B, A) := \sup_{b\in B} \operatorname{dist}(b, A)$$
$$\neq$$
$$\operatorname{dist}(A, B)$$

Definice. $A \subset X$ se nazve globální atraktor pro $(S(t),$ pokud

(i) A je kompaktní,

(ii) A je úplně invariantní, tj. $S(t)A = A$ pro $\forall t>0$,

(iii) $\operatorname{dist}(S(t)B, A) \to 0,\ t\to\infty$ pro $\forall B \subset X$ ome

Poznámka. A existuje nejvýše jeden.

je nejmenší množinou popisující chování DS pro $t \to \infty$.

Věta 2. Nechť $(S(t), X)$ je disipativní a asymptoticky kompaktní. Potom $\exists$ globální atraktor $A \subset X$.

Důkaz. $\exists W$... omezená, uniformně pohlcující, búno $\overline{W} = W$, $S(t)W \subset W \ \forall t>0$.

$A := \omega(W) \overset{\text{def.}}{=} \{y \in X;\ \exists t_n \to \infty,\ x_n \in W : S(t_n)x_n \to y$

Tvrdíme : A je globální atraktor.

(ii): $y \in A \ldots y = \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n;\ t_n \to \infty,\ x_n \in W$

$t>0$ pevné: $S(t)[S(t_n)x_n] = S(t+t_n)x_n =$

$= S(t_n')x_n$

$(AK) \Rightarrow S(t_n')x_n \xrightarrow{\text{vhodná ppst.}} z \in \omega(W) = A$

tj. $S(t)A \subset A$

$$\underset{\downarrow\ y}{S(t_n)x_n} = S(t)[\underbrace{S(t_n - t)x_n}_{\downarrow\ (AK)\text{ výběr ppsl.}\ z\in A}]$$

tj $S(t)A \supset A$.

(i) kompaktnost : $\{y_n\} \subset A$

(ii) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists z_n \in A \cdots S(n)z_n = y_n$

navíc : $z_n \in W$, neb $A = \omega(W) = \bigcap_{t>0} \overline{\bigcup_{s>t} S(s)W} \subset \overline{W} = W$

$(AK) \Rightarrow \{y_n\}$ má hrom. bod $y \in A$.

(iii) Sporem: $\exists \delta>0$; $B\subset X$ omez., $t_n\to\infty$: $sd(S(t_n)B, A)\ge\delta$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\exists x_n\in B \dots \operatorname{dist}(S(t_n)x_n, A)\ge \frac{\delta}{2}$,

tj. $\|S(t_n)x_n - y\|\ge\frac{\delta}{2}\ \forall y\in A$

(AK) $\Rightarrow S(t_n)x_n \longrightarrow \tilde{y}\in A$ ↯ □

Definice. Funkce $\gamma(t): I\to X$ se nazve trajektorie DS $(S(t),X)$, jestliže $I\subset\mathbb{R}$ je interval a platí $S(t)\gamma(s)=\gamma(t+s)\ \forall t>0, s\in I, t+s\in I$.

úplná trajektorie: $I=\mathbb{R}$.

Věta 3. Nechť $(S(t),X)$ má GA A. Potom $y_0\in A$, právě když existuje omezená úplná trajektorie $\gamma(\cdot)$ tak, že $\gamma(0)=y_0$

Důkaz: "⇒" $y_0\in A$. $\gamma(s):=S(s)y_0$, $s\ge 0$

↑

invariance: $\exists y_{-1}\in A\dots S(1)y_{-1}=y_0$

$\exists y_{-2}\in A \dots S(1)y_{-2}=y_{-1}$

⋮

$y_{-n}\in A\dots S(1)y_{-n}=y_{-n+1}$

$S(n)y_{-n}=y_0$

$s\le 0$ obecně: $s=-n+\tau$; $n\in\mathbb{N}, \tau\in\langle 0,1)$

$\gamma(s):=S(\tau)y_{-n}$

Pozorujeme: $\gamma(s)$ je trajektorie, $\gamma(s)\in A\ \forall s$.

"⇐":

$\gamma(s): I\to X$ omezená trajektorie:

$\gamma(0)=S(n)\underbrace{\gamma(-n)}_{\text{omezená posloupnost}}$

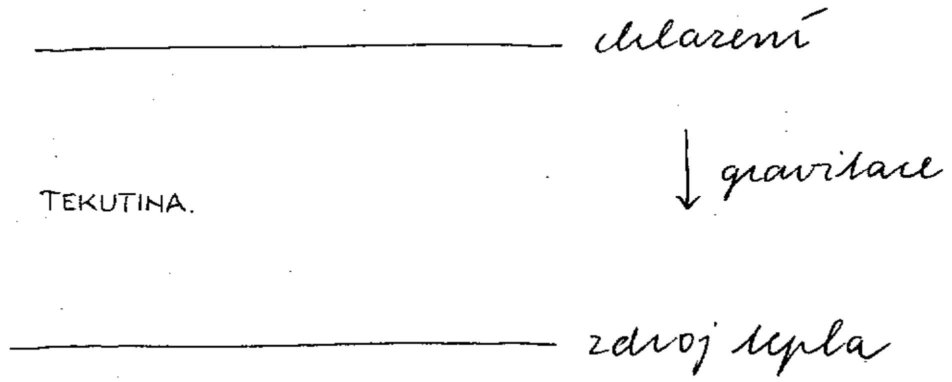
$S(n)\gamma(-n)\dots$ má hromadný bod v A, tj. $y\in A$.

Příklad. Lorenzův systém: (1963)

$x'=-\sigma x+\sigma y$

$y'=-y+rx-xz$

$z'=-bz+xy$



x… rychlost cirkulace

y… horizontální výchylka teploty

z… vertikální výchylka teploty

Definice. Pro $M\subset X$ definujeme nestabilní množinu

$n(M):=\{y\in X;\ \exists$ trajektorie $\gamma(t):(-\infty,0\rangle\to X;$
$\gamma(0)=y,\ \operatorname{dist}(\gamma(t),M)\to, t\to-\infty\}$

Věta 4. $(S(t),X)$; nechť $\exists$ GA A. Nechť $M\subset X$ je omezená. Pak $n(M)\subset A$

Důkaz. $y\in n(M)$ ($n(M)$ může být prázdná!)

$\exists\gamma(t):(-\infty,0\rangle\to X\dots$ dle předpokladu

def. $\gamma(t):=S(t)\gamma(0)$; $t>0$.

Zjevně $\gamma(\cdot)$ je úplná trajektorie

$\gamma(t)\to M$, $t\to-\infty$; M, A … omezená

$\gamma(t)\to A$, $t\to\infty$

$\Rightarrow \gamma(\cdot)$ omez. $\Rightarrow \gamma(0)=y \Rightarrow y\in A$ (V.3). □

Aplikace. $X=\mathbb{R}^n$; $S(t)\dots$ řeš. fce
$x'=f(x)$

$x_0\in\mathbb{R}^n\dots$ HSB

$X = X^+\oplus X^-$
$\sigma^+(A)$ $\sigma^-(A)$

$A=\nabla f(x_0)$

$\mathcal{N}(x_0)=\{y\in\mathbb{R}^n;$ řešení $x(t)$ s PP $x(t)=y$ splní $x(t)\to x_0,\ t\to-\infty\}$

$\mathcal{N}(x_0)\subset A$; pokud atr. ex..

Příklad. Lorenzův systém $\sigma,r,b>0$

$X=\mathbb{R}^3\ni u=(x,y,z)$

$S(t):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ řeš. fce

$F\in C^\infty\Rightarrow S(t)\in C^\infty$

alespoň lokálně (pro malé časy.)

Tvrzení 1. Lorenzovy rovnice jsou disipativní.

Důkaz. Substituce
$x=x$
$y=y$
$z=z+r+\sigma$

$x'=-\sigma x+\sigma y$
$y'=-y+rx-x(z+r+\sigma)=-\sigma x-y-xz$
$z'=-b(z+r+\sigma)+xy=-bz+xy-b(r+\sigma)$

$u'=F(u)\quad |\cdot u$

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2=F(u)\cdot u$

$|u|^2=x^2+y^2+z^2$

$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}|u|^2=-\sigma x^2-y^2-bz^2\mp zb(r+\sigma)$

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2+\sigma x^2+y^2+bz^2=-zb(r+\sigma)$

Young: $ab\le\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$

$ab=(\varepsilon^{\frac{1}{2}}a)\cdot\left(\frac{b}{\varepsilon^{1/2}}\right)\le\frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2\quad\forall a,b\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0$

$-zb(r+\sigma)=(-zb^{1/2})\cdot(b^{1/2}(r+\sigma))\le\frac{1}{2}bz^2+\frac{b}{2}(r+\sigma)^2$

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2+\sigma x^2+y^2+\frac{b}{2}z^2\le\frac{b}{2}(r+\sigma)^2$

$\frac{\gamma}{2}:=\min\{\sigma,1,\frac{b}{2}\}$

$\frac{K}{2}:=\frac{b}{2}(r+\sigma)^2$

$\frac{d}{dt}|u|^2+\gamma|u|^2\le K\quad |\,e^{\gamma t}$

$(|u|^2e^{\gamma t})'\le Ke^{\gamma t}\quad |\int_0^T dt$

$|u(T)|^2e^{\gamma T}-|u(0)|^2\le\frac{K}{\gamma}(e^{\gamma T}-1)$

$|u(T)|^2\le e^{-\gamma T}|u(0)|^2+\frac{K}{\gamma}(1-e^{-\gamma T})\quad\forall T>0$

vol $R>\sqrt{\frac{K}{\gamma}}$ .... $W:=\{u_0\in\mathbb{R}^3;\ |u_0|\le R\}$ je uniformně pohlcující & pozitivně invariantní

$\square$

Důsledek. $\exists A_L\in\mathbb{R}^3\dots$ globální atraktor Lorenzových rovnic.

($X=\mathbb{R}^3$, $\dim X<\infty\Rightarrow$[disipativní $\Rightarrow$ as. kompaktní

Úvahy. $M\subset\mathbb{R}^3\dots\ \lambda_3(S(t)M)=\int_M|\det\nabla_\eta(S(t)\eta)|\,d\eta$
$t>0$ pevné

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}S(t)\eta&=F(S(t)\eta)\\ S(0)\eta&=\eta\end{aligned}\right]\nabla_\eta$$

Označ $\phi(t,\eta):=\nabla_\eta S(t)\eta$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi(t,\eta)&=\nabla F(S(t)\eta)\phi(t,\eta)\\ V(0,\eta)&=I\end{aligned}\right\}\text{(VAR)}$$

$$\lambda_3(S(t)M) = \int_M |\det \phi(t,\eta)|\, d\eta\,;$$

kde $\phi(\cdot,\eta)$ řeší (VAR).

Lemma 2. (Formule Liouvilleova.)

nechť $\phi' = A(t)\phi$; $A(t), \phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Potom $\det \phi(t) = \det \phi(0)\, e^{\int_0^t \operatorname{tr} A(s)\, ds}$

$$\det \phi(t,\eta) = \underbrace{\det \overbrace{\phi(0,\eta)}^{=I}}_{=1} \cdot \exp\Big(\int_0^t \underbrace{(\operatorname{tr} \nabla F)}_{(\operatorname{div})}(S(s)\eta)\, ds\Big)$$

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

$$\lambda_3(S(t)M) = \int_M \exp\Big(\int_0^t (\operatorname{div} F)(S(s)\eta)\, ds\Big)\, d\eta.$$

aplikace. Lorenz

$$F = \begin{pmatrix} -\sigma x + \sigma y \\ x - y - xz \\ -bz + xy \end{pmatrix} \qquad \operatorname{div} F = -\sigma - 1 - b = -\delta$$

A_L ... atraktor.

$$\lambda_3(A_L) = \lambda_3(S(1)A_L) = \int_{A_L} \exp\Big(\int_0^1 -\delta\, ds\Big)\, d\eta = \lambda_3(A_L)\, e^{-\delta}$$

A_L je omezený $\Rightarrow \lambda_3(A_L) < \infty$

$\Rightarrow \lambda_3(A_L) = 0.$

$u(t,x): \langle 0,T\rangle \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ rychlost $\big\}$ neznámé
$p(t,x): \langle 0,T\rangle \times \Omega \to \mathbb{R}$ tlak

$f(x): \Omega \to \mathbb{R}^d$ objemová síla – daná funkce

(NS 1) $\dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nu \Delta u_i + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \qquad i = 1,\dots,d \quad t \in (0,T),\ x \in \Omega$

(NS 2) $\operatorname{div} u = 0$

(NS 3) $u(t,x) = 0 \qquad t \in (0,T);\ x \in \partial\Omega$

(NS 4) $u(0,x) = u_0(x) \qquad x \in \Omega$

(NS 2) $\Leftrightarrow$ zachování hmoty & nestlačitelnost
(homogenní tekutina, $\rho \equiv 1$)

(NS 1) $\Leftrightarrow$ 2. newtonův zákon: změna hybnosti = síla

$u = u(t,x) = u(t,\cdot) \in X$ ... prostor funkcí z $\Omega \to \mathbb{R}^d$

$\mathcal{V} := \{u: \Omega \to \mathbb{R}^d;\ C^\infty,\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega;\ \operatorname{div} u = 0\}$

$H = H^0 = \overline{\mathcal{V}}^{L^2(\Omega)}$; $\|u\|_H^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx$

$H^1 = \overline{\mathcal{V}}^{W^{1,2}(\Omega)}$; $\|u\|_{H^1}^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 dx$

$H^1 \subset W^{1,2}(\Omega)$ Poincarého nerovnost:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,, \text{ pro } \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

nula na hranici

$H^{-1} = (H^1)'$; $\|v\|_{H^{-1}} = \sup_\varphi \langle u, v\rangle$; $\varphi \in H^1$, $\|\varphi\|_{H^1} \le 1$

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega uv$$

Důsledek: $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^{-1}}$

Poznámka. $H \subset L^2(\Omega)$; $H^1 \subset W_0^{1,2}(\Omega)$, $W^{1,2} \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$

$\dfrac{1}{2^*} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{d}$; $d = \dim \Omega$

$W^{1,2} \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q < 2^*$

X Banach. $C(\langle 0,T\rangle, X)$ ... spoj. funkce $u(t): \langle 0,T\rangle \to X$

$$\|u\| = \sup\{\|u(t)\|_X ;\ t\in\langle 0,T\rangle\}$$

$L^r(0,T,X)$ ... L^r-integrovatelné funkce $u(t): \langle 0,T\rangle \to X$

$$\|u\| = \Big(\int_0^T \|u(t)\|_X^r\, dt\Big)^{1/r}$$

$L^\infty(0,T,X)$ .... $\|u\| = \operatorname*{ess\,sup}_{\langle 0,T\rangle} \|u(t)\|$

Značení! $Y_T := L^2(0,T,H^1)\cap L^\infty(0,T,H)$

norma $\|u\|_{Y_T}^2 = \int_0^T \|u(t)\|_{H^1}^2\, dt + \operatorname*{ess\,sup}_{\langle 0,T\rangle} \|u(t)\|_H^2$

$Y_T' := (L^2(0,T,H^1)\cap L^\infty(0,T,H))'$

norma $\|v\|_{Y_T'} = \sup_\varphi \int_0^T \langle v(t), \varphi(t)\rangle\, dt,\ \varphi\in Y_T;\ \|\varphi\|_{Y_T}\le 1$

Důsledek: $\left|\int_0^T\langle v,\varphi\rangle\right| \le \|v\|_{Y_T'}\|u\|_{Y_T}$

$W_T := \{u\in Y_T;\ \frac{du}{dt}\in Y_T'\}$

Motivace. $\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nu\Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \quad \Big|\, \varphi_i \sum_{i=1}^d \int_\Omega dx$

zde $\sum_{j=1}^d$ (konvence)

$\varphi(x):\Omega\to\mathbb{R}^d$

$\varphi=0$ na $\partial\Omega$

(i) (ii) (iii) (iv) (v) div $\varphi=0$

(i) $\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial t}\varphi_i\, dx = \langle \frac{\partial u}{\partial t},\varphi\rangle = \langle\frac{du}{dt},\varphi\rangle$

(ii) $\int_\Omega u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\varphi_i\, dx = \langle (u\cdot\nabla)u,\varphi\rangle$

značení: $(u\cdot\nabla)u := \sum_{j=1}^d u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

(iii) $(-\nu)\int_\Omega \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}\varphi_i\, dx$ Gauss: $\int_{\partial\Omega} F\cdot n\, dS = \int_\Omega \operatorname{div} F\, dx$ (n vnější normála)

$$\int_{\partial\Omega} F_j n_j\, dS = \int_\Omega \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\, dx$$

aplikace: $F_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\varphi_i$: $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\varphi_i n_j\, dS = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\Big\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\varphi_i\Big\}dx =$

$$= \int_\Omega \Delta u_i\varphi_i + \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\, dx$$

$\Rightarrow$ (iii) $= \langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle$

(iv) $\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i}\varphi_i\, dS = \int_{\partial\Omega} p\underbrace{\varphi_i n_i}_{=0}\, dS - \int_\Omega p\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\, dx = 0$

(v) $\langle f,\varphi\rangle$

Definice. Slabým řešením (NS1)–(NS3) se rozumí funkce $u\in W_T$ splňující v $(0,T)$ rovnici

$$\langle\tfrac{du}{dt},\varphi\rangle + \langle(u\cdot\nabla)u,\varphi\rangle + \nu\langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle$$

pro $\forall\varphi\in H^1$ pevné.

Věta 5. (1) $W_T \hookrightarrow C(\langle 0,T\rangle,H)$

(2) $W_T \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(0,T,H)$

Důkaz. (Formálně:) $\|u(t)\|_H^2 = \underbrace{a(t)\|u(t)\|_H^2}_{P_1(t)} + \underbrace{(1-a(t))\|u(t)\|_H^2}_{P_2(t)}$

$$P_1(t) = \int_0^t \frac{d}{ds}\{a(s)\|u(s)\|_H^2\}\, ds = \int_0^t a'(s)\|u(s)\|_H^2\, ds =$$

$$= \int_0^t a(s)\underbrace{\frac{d}{ds}\langle u(s),u(s)\rangle}_{\langle\frac{du}{ds}(s),u(s)\rangle + \langle u(s),\frac{du}{ds}(s)\rangle}\, ds$$

$$|P_1(t)| \le \int_0^T \frac{1}{T}\|u(s)\|_H^2\, ds + 2\langle\tfrac{du}{ds},u\rangle\, ds \le \frac{1}{T}\|u\|^2_{L^\infty(0,T,H)} + 2\underbrace{\|\tfrac{du}{ds}\|_{Y_T'}\|u\|_{Y_T}}_{\le\|\frac{du}{ds}\|_{Y_T'}^2+\|u\|_{Y_T}^2}$$

$$\|u(t)\|_H^2 \le \frac{1}{T}\|u\|_{L^\infty(0,T,H)} + \|\tfrac{du}{ds}\|_{Y_T'}^2 + \|u\|_{Y_T}^2\,(1+T) \quad \Big|\ \sup_t$$

$$\|u(t)\|_{C(\langle 0,T\rangle,H)} \le K\Big\{\underbrace{\|u\|_{Y_T} + \|\tfrac{du}{dt}\|_{Y_T'}}_{\text{norma } W_T}\Big\}$$

$W^{1,p} = \{ u \in L^p ; \nabla u \in L^p \}$

$u = u(x), \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$

(i) $p<d$: $W^{1,p} \hookrightarrow L^{p*}$ $\quad p* = \frac{pd}{d-p} > p$

$W^{1,p} \hookrightarrow\hookrightarrow L^q \quad \forall q < p*$

(ii) $p=d$: $W^{1,p} \hookrightarrow\hookrightarrow L^q \ \forall q<\infty$; $W^{1,p} \not\hookrightarrow L^\infty$

(iii) $p>d$: $W^{1,p} \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$

$H \ldots u: \Omega \to \mathbb{R}^d$ $\quad u \in L^2(\Omega)$, $\operatorname{div} u = 0$

$\|u\|_H = \|u\|_2 = \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$

H_1 $\quad u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\operatorname{div} u = 0$

$\|u\|_{H^1} = \left(\int_\Omega \cancel{|u|^2} + |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} = \|\nabla u\|_2$

$H^{-1} \ldots (H^1)'$ $\quad \|v\| = \sup \langle v, \varphi \rangle = \sup \int_\Omega v \varphi \, dt$; $\varphi \in H^1, \|\varphi\| \le 1$

Bochner: $Y_T = L^2(0,T,H^1) \cap L^\infty(0,T,H)$

$W_T = \{ u \in Y_T ; \frac{du}{dt} \in Y_T' \}$

Věta 5. 1) $W_T \hookrightarrow C(\langle 0,T \rangle, H)$

2) $W_T \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(0,T,H)$

Důkaz. 1) $\sup\{ \|u(t)\|_{H}^2, t \in \langle 0,T\rangle \} \le K \left(\|u\|_{Y_T}^2 + \|\frac{du}{dt}\|_{Y_T'}^2 \right)$

dokázáno dříve

$u \in W_T \ldots \{u_n\}$ hladké, $u_n \to u$ $\quad Y_T$

$\frac{du_n}{dt} \to \frac{du}{dt}$ $\quad Y_T'$

$\|u_n - u_m\|_{C(\langle 0,T\rangle, H)} \le K \left(\|u_n - u_m\|_{Y_T}^2 + \|\frac{du_n}{dt} - \frac{du_m}{dt}\|_{Y'}^2 \right)$

$\Rightarrow \{u_n\}$ cauchyovská v $C(\langle 0,T\rangle, H)$.

ad 2):

Lemma 3. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists C > 0, \exists P: H \to H$ konečnědimenzionální ortonormální projekce tak, že

$\|u\|_H^2 \le \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + C \|Pu\|_H^2$

Poznámka. Víme, že $H^1 \hookrightarrow H$, $\|\cdot\|_H \le K \|\cdot\|_{H_1}$

Důkaz (Lemmatu).

Sporem. $\exists \varepsilon > 0 \ \forall C, \forall$ projekci $P \ \exists u$:

$\|u\|_H^2 > \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + C \|Pu\|_H^2$

$\{w_k\} \ldots$ ON báze H, búno $\{w_k\} \subset H^1$

$P := P^N : H \to \operatorname{Lin}\{w_1, \ldots w_N\}$

$P^N u = \sum_{j=1}^N \langle u, w_j \rangle w_j$

$C := N \ldots \exists u^N : \|u^N\|_H^2 > \varepsilon \|u^N\|_{H^1}^2 + N \|P^N u^N\|_H^2$

Búno $\|u^N\|_H^2 = 1$

$\{u^N\} \subset H^1$ omezené $\Rightarrow u^N \to u$ v H (ppsl.)

$P^N u^N \to u$ $\quad P^N u^N - u = \underbrace{P^N u^N - P^N u}_{P^N(u^N - u)} + \underbrace{P^N u - u}_{\to 0}$

neb $\{w_k\}$ je báze

$\to 0$; $\|P^N\| \le 1$

Spor: $1 > N \|P^N u^N\| \Rightarrow P^N u^N \to 0$

zároveň $\|u^N\| = 1$ $\square$

2) $\{u_n\}$ omezená v Y_T; cíl: $\exists$ ppsl. cauchyovská v $L^2(0,T,H)$

$\{\frac{du^N}{dt}\}$ omezená v Y_T'

$\varepsilon > 0$. L.3: $\exists C > 0, \exists P : H \to PH = \mathbb{R}^m$ ON projekce

$\|u^N(t) - u^M(t)\|_H^2 \le \varepsilon \|u^N(t) - u^M(t)\|_{H^1}^2 + C \|P(u^N(t) - u^M(t))\|_H^2$

$z^N(t) := P u^N(t) : (0,T) \to \mathbb{R}^m$

$|z^N(t)|_{\mathbb{R}^m} = \|P u^N(t)\|_H \le \|u^N(t)\|_H$

$\{u^N\} \subset L^2(0,T,H)$ omezená $\Rightarrow$ $\{z^N\}$ omezená v $L^2(0,T,\mathbb{R}^m)$
a v $L^1(0,T,\mathbb{R}^m)$

$z^N = (z_1^N, \dots z_m^N)$

$z_k^N = \langle u^N, w_k \rangle$

$$\frac{d}{dt} z_k^N = \left\langle \frac{d}{dt} u^N, w_k \right\rangle$$

$$\int_0^T \left|\frac{d}{dt} z_k^N\right| \le \int_0^T \left|\left\langle \frac{du^N}{dt}, w_k \right\rangle\right| \le \left\|\frac{du^N}{dt}\right\|_{Y_T'} \cdot \|w_k\|_{Y_T} \le C_2$$

$\{z^N\}$ je omezená v $W^{1,1}(0,T) \Rightarrow$

má hromadný bod v $L^2(0,T) \Rightarrow$

$z^N = Pu^N$ je cauchyovská v $L^2(0,T,H)$

$$\int_0^T \|u^N(t)-u^M(t)\|_H^2 \le \varepsilon \int_0^T \|u^N(t)-u^M(t)\|_{H^1}^2 + C \underbrace{\int_0^T \|P(u^N(t)-u^M(t))\|_H^2}_{\substack{\text{cauchyovskost} \\ \Rightarrow \text{ malé pro } M,N \ge N_0}} \le$$

$$\le \varepsilon K + \varepsilon = \varepsilon(K+1)$$

Diagonální výběr: $\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, \dots$ $\square$

Tvrzení 2. Nechť $u_0 \in H$, $f \in H$, $T > 0$. Potom existuje slabé řešení $u \in W_T$ úlohy

(NS1) $\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u + \nabla p = f$

(NS2) $\operatorname{div} u = 0$

(NS3) $u|_{\partial\Omega} = 0$

(NS4) $u|_{t=0} = u_0$

má smysl, neb $W_T \hookrightarrow C(\langle 0,T \rangle, H)$

Lemma 4. (O zmizení konvektivního členu.) Nechť $\operatorname{div} v = 0$, $v|_{\partial\Omega} = 0$. Potom

$$\int_\Omega (v \cdot \nabla) u \cdot u \, dx = 0.$$

Důkaz. $(v \cdot \nabla) u = \left(\sum_{j=1}^d\right) v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

$$\int_\Omega v_j \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_i}_{\frac{1}{2}\frac{\partial u_i^2}{\partial x_j}} dx = \int_\Omega v_j \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} |u|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega v \cdot \nabla |u|^2 dx = \cancel{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |u|^2 v \cdot n \, dS - \frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 \operatorname{div} v \, dx$$

(per-partes)

Gauss: $\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, dS = \int_\Omega \operatorname{div} F \, dx$

$F = \underset{\text{vektor}}{f}\,\underset{\text{skalár}}{g}$

$$\int_{\partial\Omega} g f \cdot n \, dS = \int_\Omega f \cdot \nabla g \, dx + \int_\Omega g \operatorname{div} f \, dx$$

$f = v$; $g = \frac{1}{2}|u|^2$ $\square$

Tvrzení 3. Slabé řešení je jednoznačné! $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Důkaz. $u, v \dots$ slabá řešení

$$\overset{(i)}{\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi \right\rangle} + \overset{(ii)}{\langle (u \cdot \nabla) u, \varphi \rangle} + \overset{(iii)}{\nu \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle} = \langle f, \varphi \rangle$$

platí v $(0,T)$ $\forall \varphi \in H^1$ pevné!

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial t}, \varphi \right\rangle + \langle (v \cdot \nabla) v, \varphi \rangle + \nu \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

Odečteme, položme $v - u =: w$

(i) $\langle \frac{\partial w}{\partial t}, w\rangle = \int_\Omega \frac{\partial w_i}{\partial t} w_i\, dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|w|^2 dx =$

$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_2^2$

(iii) $\nu\langle \nabla w, \nabla w\rangle = \nu\|\nabla w\|_2^2$

(ii) $\int_\Omega [(v\cdot\nabla)v - (u\cdot\nabla)u]\,w\, dx =$

$-(u\cdot\nabla)v \quad +(u\cdot\nabla)v$

$$= \int_\Omega [(w\cdot\nabla)v + \underbrace{\cancel{(u\cdot\nabla)w]\,w\,dx}}_{}] \overset{(\text{L}.4)}{=}$$

$$= \int_\Omega w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i\, dx \le \int_\Omega |w|^2|\nabla v|\, dx \overset{\text{Hö.N.}}{\le} \||w|^2\|_2 \cdot \|\nabla v\|_2 =$$

$= \|w\|_4^2 \cdot \|\nabla v\|_2 \le 2\|w\|_2\|\nabla v\|_2\|\nabla w\|_2$

Ladyženská: $\|u\|_4 \le \sqrt{2}\,\|u\|_2^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_2^{\frac{1}{2}}$

Tedy máme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_2^2 + \nu\|\nabla w\|_2^2 \le \frac{2}{\sqrt{\nu}}\|\nabla v\|_2\|w\|_2\|\nabla w\|_2\sqrt{\nu} \le$$

$$\le \frac{2}{\nu}\|\nabla v\|_2^2\|w\|_2^2 + \frac{\nu}{2}\|\nabla w\|_2^2$$

$$\frac{d}{dt}\|w\|_2^2 + \underbrace{\nu\|\nabla w\|_2^2}_{\ge 0} \le 4\nu^{-1}\|\nabla v\|_2^2\|w\|_2^2 \text{ pro } t\in(0,T)$$

Gronwall: $\|w(t)\|_2^2 \le \|w(0)\|_2^2 \exp\Big(4\nu^{-1}\underbrace{\int_0^T\|\nabla v(s)\|_2^2\, ds}_{<\infty \quad v\in L^2(0,T,H)}\Big)$

$\square$

__Důsledek.__ Lze definovat $S(t): H \longrightarrow H$

$u_0 \longrightarrow u(t)$

$\uparrow$ jediné (slabé) řešení (NS)

+ spojitost:

$t \mapsto S(t)u_0 = u(t) \in C(\langle 0,T\rangle; H)$

Tvrzení 3: $\|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_2 \le C_2\|u_0 - v_0\|_2$

... $S(t)$ lokálně lipschitzovské

$(S(t),H)$ ... DS příslušný systému (NS-1)–(NS-4).

__Tvrzení 4.__ $(S(t),H)$ je disipativní.

$\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi\rangle + \langle (u\cdot\nabla)u, \varphi\rangle + \nu\langle\nabla u, \nabla\varphi\rangle = \langle f, u\rangle$; $\varphi = u$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 + \underset{(\text{L}.4)}{0} + \nu\|\nabla u\|_2^2 \le \|f\|_2\|u\|_2 \le \|f\|_2 \cdot c_P\|\nabla u\|_2$$

$$= \|f\|_2\frac{c_P}{\sqrt{\nu}}\|\nabla u\|_2\sqrt{\nu} \le$$

$$\overset{\text{Young}}{\le} \frac{1}{2}\nu\|\nabla u\|_2^2 + \frac{c_P^2}{2\nu}\|f\|_2^2$$

$\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 + \nu\|\nabla u\|_2^2 \le K_1$; $\quad K_1 = \frac{c_P^2}{\nu}\|f\|_2^2$

Energetická nerovnost

$\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 \le K_1 - \nu\|\nabla u\|_2^2 \le K_1 - \frac{\nu}{c_P^2}\|u\|_2^2$

Vol $R>0$, aby $K_1 - \frac{\nu}{c_P^2}R^2 < 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|u\|_2^2 < 0$ pro $\|u\|_2 < R$

$B = \{u\in H;\ \|u\|_2 < R\}$ je pozitivně invariantní & uniformně pohlcující.

$\square$

__Tvrzení 5.__ (Kompaktnost řešení.)

Nechť $\{u^N\}\subset W_T$ jsou slabá řešení (NS) na $(0,T)$. Nechť $\{u^N_{(0)}\}$ je omezená v H. Potom existuje podposloupnost $u^N \to u$, kde u je opět slabé řešení na $(0,T)$.

Důkaz. 1. krok: $\{u^N\}$ omezená ve W_T, tj. $\{u^N\}$ omezená v $Y_T = L^\infty(0,T,H)\cap L^2(0,T,H^1)$

$\{\frac{du^N}{dt}\}$ omezená v Y_T'

rovnice pro u^N ... testuji $u^N \Rightarrow$

$\Rightarrow$ en. nerovnost: $\frac{d}{dt}\|u^N\|_2^2 + \nu\|\nabla u^N\|_2^2 \le K_1 \cdot \int_0^t, t\in(0,T)$ t lib.

$\Rightarrow \|u^N(t)\|_2^2 + \nu\int_0^t \|\nabla u^N\|_2^2 \le K_1 T + \|u^N(0)\|_2^2 \le K_2$

$\Rightarrow \|u^N\|_{Y_T} \le K_2$

Odhad $\frac{du^N}{dt}$: rovnice & dualita:

$$\left\|\frac{du^N}{dt}\right\|_{Y_T'} := \sup_\psi \int_0^T \left\langle \frac{du^N}{dt},\psi\right\rangle;\ \psi\in Y_T;\ \|\psi\|_{Y_T}\le 1$$

$$\left\langle \frac{du^N}{dt},\psi\right\rangle = \underbrace{-\langle (u^N\cdot\nabla)u^N,\psi\rangle}_{P_1}\underbrace{-\nu\langle\nabla u^N,\nabla\psi\rangle}_{P_2}+\underbrace{\langle f,\psi\rangle}_{P_3}$$

$$\left|\int_0^T P_1\right| \le \left|\int_0^T\int_\Omega u_j^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_j}\psi_i\,dx\,dt\right| \le \int_0^T\left(\int_\Omega |u^N||\nabla u^N||\psi|\,dx\right)dt \le$$

Zobecněný Hölder:

$$\int_\Omega |fgh|\,dx \le \|f\|_r\|g\|_q\|h\|_s;\ \frac{1}{r}+\frac{1}{q}+\frac{1}{s}=1$$

$$\le \int_0^T \|u^N\|_4\|\nabla u^N\|_2\|\psi\|_4\,dt \overset{\text{LADYŽENSKÁ}}{\le} 2\int_0^T \|u^N\|_2^{1/2}\|\nabla u^N\|_2^{3/2}\|\nabla\psi\|_2^{1/2}\,dt \le$$

omezené nezávisle na t, $u^N,\psi\in L^\infty(0,T,H)$

$$\le C_1\int_0^T \|\nabla u^N\|_2^{3/2}\|\nabla\psi\|_2^{1/2}\,dt \overset{\text{Hö.}}{\le} C_1\left(\int_0^T\|\nabla u^N\|_2^2\right)^{3/4}\left(\int_0^T\|\nabla\psi\|_2^2\right)^{1/4}\le K_2$$

u^N,ψ ... omezené v $L^\infty(0,T,H)\cap L^2(0,T,H)$

$$\left|\int_0^T P_2\right| \le \nu\left|\int_0^T \underbrace{\langle\nabla u^N,\nabla\psi\rangle}_{\|\nabla u^N\|_2\|\nabla\psi\|_2}\right| \le \nu\left(\int_0^T\|\nabla u^N\|_2^2\right)^{1/2}\left(\overset{W^{1,2}}{\int_0^T}\|\nabla\psi\|_2^2\right)^{1/2}\le K_3$$

$$\left|\int_0^T\langle f,\psi\rangle\right| \le K_4.$$

Princip slabé sekvenciální kompaktnosti:

$\exists$ podposloupnost: $u^N \to u$ slabě v Y_T

$\frac{\partial u^N}{dt}\to\frac{du}{dt}$ slabě v Y_T'

slabá konvergence: přechod za integračním znamením;

$$\left\langle\frac{du^N}{dt},\varphi\right\rangle + \langle (u^N\cdot\nabla)u^N,\varphi\rangle + \nu\langle\nabla u^N,\nabla\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle$$

$\psi(t,x)=\varphi(t)\chi(t)$ $\varphi\in H^1$ lib., $t\in(0,T)$

návrh $\chi=\chi(t)\in C_c^\infty(0,T)$; $\int_0^T dt$

$$\int_0^T\left\langle\frac{du^N}{dt},\psi\right\rangle dt + \int_0^T\langle (u^N\nabla)u^N,\psi\rangle dt + \nu\int_0^T\langle\nabla u^N,\psi\rangle dt = \int_0^T\langle f,u\rangle dt$$

$B_\ell = \{\chi : \langle 0,\ell\rangle \to H;\ \chi$ je slabé řešení, $\chi(0)\in B\}$

$L(t): B_\ell \to B_\ell \quad [L(t)\chi](s) = S(t)\chi(s)$

Poznámka. $\left.\begin{array}{l}\chi\in B_\ell \Rightarrow \chi \in L^\infty(0,\ell,H)\cap L^2(0,\ell,H^1) \\ \frac{d}{dt}\chi \in (\qquad\qquad) \end{array}\right\}$ v.s. $\Rightarrow \chi\in C(\langle 0,\ell\rangle;H)$

Terminologie. trajektorie = funkce $s\mapsto \chi(s)$

orbit = množina $\{\chi(s),\ s\in\langle 0,\ell\rangle\}$

Připomínka:

Tvrzení 6. B_ℓ je kompaktní v $H_\ell := L^2(0,\ell;H)$

Důsledek. $\exists A_\ell \subset B_\ell$ globální atraktor pro $(L(t),B_\ell)$

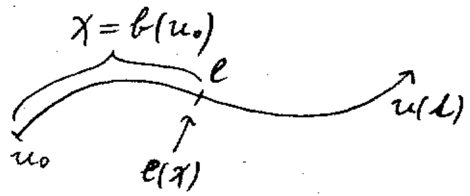
Důkaz. Věta 2: $\exists$ GA $\Leftrightarrow$ disipativita & as. komp. □

Definice. $b: B\to B_\ell$

$u_0\mapsto \chi,\ \chi(0)=u_0$

$e: B_\ell\to B$

$\chi\mapsto\chi(\ell)$



Lemma 4. (1) b je lipschitzovská (z H do H_ℓ)

(2) e je lipschitzovská (z H_ℓ do H)

(3) $L(t): B_\ell\to B_\ell$ jsou uniformně (vůči $t\in\langle 0,T\rangle$) lipschitzovské z H_ℓ do H_ℓ

Důsledek. A_ℓ ... GA pro $(L(t),A_\ell) \Rightarrow A := e(A_\ell)$ je GA pro $S(t)B$ a potažmo pro $S(t)H$

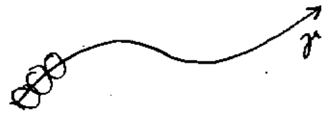
Definice. X ... normovaný prostor (příp. metrický)

Fraktální dimenzi množiny $A\subset X$ definujeme:

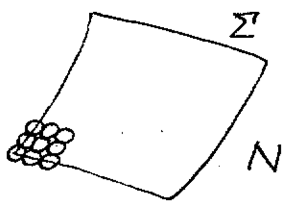
$$d_f^X(A) = \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\ln N_X(A,\varepsilon)}{-\ln\varepsilon},$$

kde $N_X(A,\varepsilon)$ je nejmenší počet uzavřených koulí o poloměru ε a středu v A, které pokrývají A.

motivace.



$N(\gamma,\varepsilon)\sim\frac{1}{\varepsilon}$



$N(\Sigma,\varepsilon)\sim\frac{1}{\varepsilon^2}$

Lemma 5. Nechť $A = B_{\mathbb{R}^m}(0,R)$; $r\le R$. Potom

$$\left(\frac{R}{r}\right)^m \le N_{\mathbb{R}^m}(A,r) \le \left(\frac{3R}{r}\right)^m$$

Důkaz. (i) nechť $B(0,R)\subset\bigcup_{i=1}^N B(a_i,R)$

$$\alpha_m R^m = |B(0,R)| \le \sum_{i=1}^N |B(a_i,R)| = N\cdot\alpha_m R^m \Rightarrow N\ge \frac{R^m}{r^m}$$

(ii) Trik: $\{B(a_i,\frac{r}{2})\}_{i=1}^N$ ... maximální disjunktní systém; $a_i\in A = B(0,R)$.

Pozorování: $\bigcup_{i=1}^N B(a_i,r)\supset B(0,R)$

? $z\in B(0,R)\setminus\bigcup B(a_i,r)$

$\|z-a_i\|>r \Rightarrow B(z,\frac{r}{2})\cap B(a_i,\frac{r}{2})=\emptyset$ ↯

Odtud N: $\bigcup_{i=1}^N B(a_i,\frac{r}{2})\subset B(0,R+\frac{r}{2})$

disj.: $|\bigcup \quad| \le |\quad| = \alpha_m(R+\frac{r}{2})^m$

$\| \quad \sum N\alpha_m(\frac{r}{2})^m$

$N\le \left(\frac{2R}{r}+1\right)^m \le \left(\frac{3R}{r}\right)^m$ □

Důsledek. $d_f^{\mathbb{R}^m}(B_{\mathbb{R}^m}(0,R)) = m$.

Věta 6. X,Y NLP.

(1) $A,B\subset X$: $d_f^X(A\cup B)=\max\{d_f^X(A),d_f^X(B)\}$.

(2) $F\in C^{0,\alpha}(X,Y)$, $A\subset X$: $d_f^X(F(A))\le\alpha^{-1}d_f^X(A)$

Speciálně: $F\in Lip(X,Y)$ nezvětší dimenzi.

(3) $A\subset X$, $B\subset Y$: $d_f^{X\times Y}(A\times B)\le d_f^X(A)+d_f^Y(B)$

Lemma 6. Nechť $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, nechť $\exists \alpha > 0$ tak, že $\varepsilon_{n+1} \geq \alpha \varepsilon_n$ $\forall n$. Potom $d_f^X(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln N_X(A,\varepsilon_n)}{-\ln \varepsilon_n}$

Důkaz. $\geq$: zjevné (podposloupnost)

$\leq$: $\varepsilon > 0$ dáno. $n_\varepsilon := \max\{k \in \mathbb{N} : \varepsilon_k \geq \varepsilon\}$
BÚNO $\varepsilon \leq \varepsilon_1$

Předpoklady $\Rightarrow n_\varepsilon < \infty$, $n_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0+} \infty$

$\varepsilon_{n_\varepsilon} \geq \varepsilon > \varepsilon_{n_\varepsilon+1} \geq \alpha \varepsilon_{n_\varepsilon}$

$$\frac{\ln N_X(A,\varepsilon)}{-\ln \varepsilon} \leq \frac{\ln N_X(A,\varepsilon_{n_\varepsilon+1})}{-\ln \varepsilon_{n_\varepsilon}} \leq \frac{\ln N_X(A,\varepsilon_{n_\varepsilon+1})}{-\ln \varepsilon_{n_\varepsilon+1} + \ln \alpha} \quad \Big/ \limsup_{\varepsilon\to 0} \quad \#$$

$$d_f^X(A) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln N_X(A,\varepsilon_n)}{-\ln \varepsilon_n}$$

$\square$

Definice. Řekneme, že $L: X \to X$ má na množině $M \subset X$ shlazovací vlastnost, jestliže $L|M$ je lipschitzovské z X do Y, kde $X \hookrightarrow\hookrightarrow X$.

Věta 7. $A \subset X$ omezená, negativně invariantní vůči zobrazení $L: X \to X$ (tj. $LA \supset A$). Nechť L má na A shlazovací vlastnosti. Potom $d_f^X(A) \leq \frac{\ln K}{\ln 2}$, kde $K = N_X(B_Y(0,1), \frac{1}{4\kappa})$, κ je lip. konstanta L, tj.

Důkaz. Vol $R > 0$ a $u_0 \in A$: $A \subset B(u_0, R)$.

Tvrdíme: $N_X(A, 2^{-n}R) \leq K^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Pokud toto platí, stačí užít Lemma 6. ($\varepsilon_n = 2^{-n}R$).

Indukce:

$n = 0$ ✓

$n \to n+1$: $A \subset \bigcup_{j \leq K^n} B_X(u_j, 2^{-n}R)$; $u_j \in A$

$$A \subset LA \subset \bigcup_j LB_X(u_j, 2^{-n}R) \subset \bigcup_j B_Y(Lu_j, 2^{-n}R\kappa)$$

$B_Y(0,1)$ pokryjeme K koulemi v X, poloměr $\frac{1}{4\kappa}$

$B_Y(Lu_j, 2^{-n}R\kappa)$ .... poloměr $2^{-n-2}R$

(středy ne nutně v A)

$$A \subset \bigcup_{l \leq K^{n+1}} B(v_l, \underbrace{2^{-n-2}R}_{\rho}); \; v_l \in X$$

$$A \subset \bigcup_l B(\tilde{v}_l, \underset{2^{-n-1}R}{\underset{\parallel}{2\rho}})$$

$\square$

Věta 8. $(S(t),X)\dots$ DS

$(S_\eta(t),X)\dots$ lokálně stejnoměrná aproximace

(APR) $S_\eta(t)u \xrightarrow{\eta\to 0} S(t)u$ stejnoměrně vůči $t\in\langle 0,T\rangle$, $u\in B$ omez.

Nechť A, A_η jsou globální atraktory pro $(S(t),H)$, resp. $(S_\eta(t),H)$.

Nechť $\exists\, W\subset X$ omezená, $A, A_\eta\subset W$ $\forall \eta\in(0,\delta)$.

Potom $\operatorname{dist}_X(A_\eta,A)\xrightarrow{\eta\to 0} 0$

Důkaz. $\varepsilon>0$, W omezená, A je GA pro $(S(t),X)$.

$\exists T>0:\ \operatorname{dist}_X(S(T)W,A)<\frac{\varepsilon}{2}$

(APR) $\Rightarrow \exists \delta>0\dots \|S_\eta(T)u-S(T)u\|_X<\frac{\varepsilon}{2}\quad \forall u\in W,\ \eta\in(0,\delta)$

$\Rightarrow \operatorname{dist}_X(S_\eta(T)W,A)<\varepsilon$

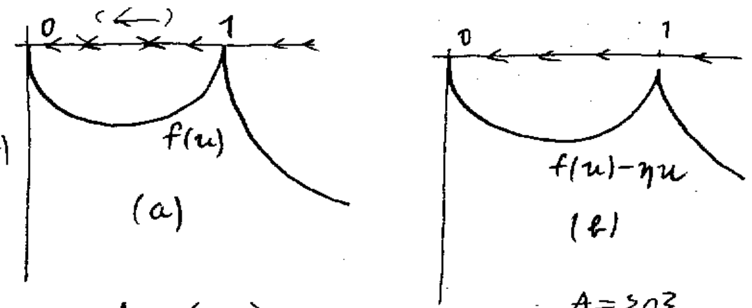
$A_\eta\subset W$

$S(T)A_\eta = A_\eta\subset S(T)W$ $\quad\Rightarrow \operatorname{dist}_X(A_\eta,A)<\varepsilon$

Poznámka: Obecně $\operatorname{dist}_X(A, A_\eta)\overset{\eta\to 0}{\not\to} 0$ $\square$

Příklad. $u'=f(u)$ (a)

$u'=f(u)-\eta u$ (b)



$A=\langle 0,1\rangle$ $\qquad$ $A=\{0\}$

$\operatorname{dist}(A_\eta,A)=0$

$\operatorname{dist}(A,A_\eta)=1\quad\forall\eta>0$

Definice. $(S(t),X)\dots$ DS

$\mathcal{E}\subset X$ se nazve exponenciální atraktor, jestliže:

(i) $\mathcal{E}$ je kompaktní

(ii) $S(t)\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ je pozitivně invariantní

(iii) $\exists\gamma>0:\ \forall B\subset X$ omezené: $\operatorname{dist}(S(t)B,\mathcal{E})\le c_0 e^{-\gamma t}$ $\forall t\ge 0$, pro nějaké $c_0(B)$

(iv) $d_f^X(\mathcal{E})<\infty$

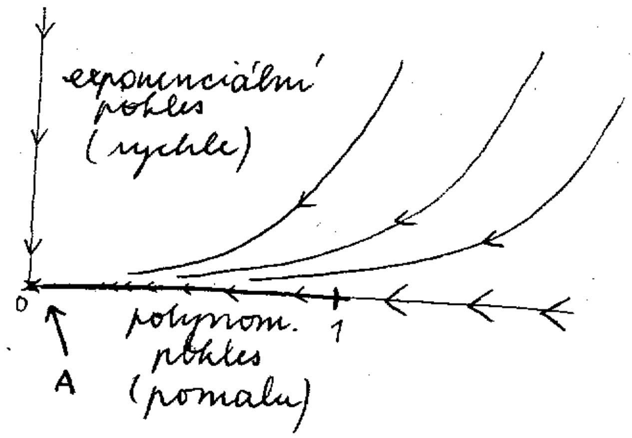
Poznámky. $A\subset\mathcal{E}\leftarrow$ exponenciálně přitahující množina

$\uparrow$ nejmenší přitahující množina

$\mathcal{E}$ není určen jednoznačně

$S(t)\mathcal{E}$ je opět exp. atraktor

Příklad. $x'=x^2$, $y'=-y$; $x,y\ge 0$



$\mathcal{E}=$ celá úsečka

Diskrétní dynamický systém $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}(S^n,W)$: $W\subset X$ om. uz., $S: W\xrightarrow{\text{spoj.}} W$

A je GA pro $(S^n,W)\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ (i) A kompakt

(ii) $S(A)=A$

(iii) $\operatorname{dist}(S^nW,A)\xrightarrow{n\to\infty}0$

$\mathcal{E}$ je EA pro $(S^n,W)\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ~~E ko~~ (i) $\mathcal{E}$ kompakt

(ii) $S\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$

(iii) $\exists\gamma,c>0:\ \operatorname{dist}_X(S^nW,\mathcal{E})\le c\cdot e^{-\gamma n}$ $\forall n$

(iv) $d_f^X(\mathcal{E})<\infty$

Věta 2'. (S^m, W) má GA $\iff$ disipativní (triviální: W omez.) & as. kompaktní:

$\forall \{x_n\} \subset W$ má $\{S^n x_n\}$ HB ve W.

Platí: $A = \{y \in W;\ y$ je HB $\{S^n x_n\};\ x_n \in W\}$.

Věta 9. (S^n, W) je DDS. Potom je ekvivalentní:

(1) (S^n, W) má EA

(2) $\exists$ konstanty $a, b > 0,\ \eta \in (0,1),\ K \geq 1$ tak, že

(E) $N_X(S^n W, a\eta^n) \leq bK^n \quad \forall n = 0, 1, \dots$

Navíc (1) $\Rightarrow$ (E) splněno s konstantami $\eta = e^{-\gamma}$, $K = e^{\gamma d}$, kde γ je konstanta z (iii) a $d > d_f^X(\mathcal{E})$.

Obráceně: (E) $\Rightarrow \exists\ \mathcal{E}$ EA tak, že (iii) platí s $\gamma = -\ln \eta$; $d_f^X(\mathcal{E}) \leq \frac{\ln K}{-\ln \eta}$.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) domácí úkol

(2) $\Rightarrow$ (1) 1. krok: (E) $\Rightarrow (S^n, W)$ je asymptoticky kompaktní (d.ú.)

V. 2' $\Rightarrow \exists A \subset W \dots$ GA a platí $d_f^X(A) \leq \frac{\ln K}{-\ln \eta}$

$\overset{\text{w}}{A} = S^n A \subset S^n W$: (E) $\Rightarrow N_X(A, a\eta^n) \leq bK^n$

L. 6 $\Rightarrow d_f^X(A) \leq \frac{\ln K}{-\ln \eta}$.

2. krok: (E) $\Rightarrow S^n W \subset \bigcup_{j \leq bK^n} B(u_j, a\eta^n)$; $u_j \in S^n W$

$E_n = \{u_1^n, \dots u_{bK^n}^n\} \subset S^n W$

$\mathcal{E}_0 := \bigcup_{m,k \geq 1} S^m(E_k)$; $\mathcal{E} = A \cup \mathcal{E}_0$

Tvrdíme: $\mathcal{E}$ je hledaný EA.

(iii): $\mathcal{E} \supset E_n \quad dist_X(S^n W, \mathcal{E}) \leq dist_X(S^n W, E_n) \leq$
$\leq a\eta^n \leq a e^{-n\gamma} \quad (\gamma = -\ln \eta)$

(ii) $S\mathcal{E} = SA \cup S\mathcal{E}_0 = A \cup \bigcup_{\substack{m \geq 0 \\ k \geq 1}} \underbrace{S(S^m E_k)}_{S^{m+1}(E_k)} \subset A \cup \mathcal{E}_0$

(i) ? kompaktnost.

$\mathcal{E} = A \cup \bigcup_{k,m} F_{k,m}$

$F_{k,m} = S^m(E_k) \subset S^{m+k} W$

$\cap$

$S^k W$

konečné, kompaktní

Břno: y_e náleží do nekonečně mnoha $F_{k,m}$

$\Rightarrow y_e \in S^n W$ pro libovolně velká n.

$\Rightarrow \{y_e\}$ má HB v $A \subset \mathcal{E}$.

(iv) $d_f^X(\mathcal{E}) = \max\{d_f(A), d_f(\mathcal{E}_0)\}$

$N(\mathcal{E}_0, a\eta^n) \leq N(\bigcup_{m+k<n} S^m(E_k), a\eta^n) + N(S^n W, a\eta^n)$

$\mathcal{E}_0 = \bigcup_{m+k<n} S^m(E_k) \cup S^n W$

$\leq \underbrace{\sum_{m+k<n} \# S^m(E_k)}_{\leq n^2 bK^n} + \underset{\text{díky (E)}}{bK^n} \leq$

$n^2 \dots$ počet sčítanců

$\# E_k \leq bK^k$

$\leq (n^2 + 1) bK^n$

Věta 10. Nechť $S: W \to W$ má shlazovací vlastnost. Potom S splňuje (E).

Důkaz. $\|Su - Sv\|_Y \le K \|u-v\|_X$, $Y \hookrightarrow\hookrightarrow X$.

Volme $u_0 \in W$, $R>0$: $W \subset B_X(u_0, R)$

Indukcí: $N_X(S^n W, R\cdot 2^{-n}) \le K^n$;

$K = N_X(B_Y(0,1); \frac{1}{4K})$

$n=0$ … platí.

Nyní nechť $S^n W \subset \bigcup_{j \le K^n} B_X(u_j, R\cdot 2^{-n})$

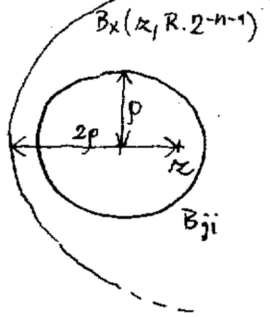
$$S^{n+1}W \subset \bigcup_{j\le K^n} \underbrace{S B_X(u_j, R\cdot 2^{-n})}_{\subset \underbrace{B_Y(Su_j, K\frac{R}{2^n})}_{\underbrace{\bigcup_{i\le K} B_X(u_{ji}, \frac{R}{2^{n+2}})}_{=:B_{ji}}}} \subset \cancel{B_Y(}$$

obecně $u_{ji} \notin S^{n+1}W$!

Pokud $B_{ji} \cap S^{n+1}W = \emptyset$, kouli B_{ji} vůbec nepotřebujeme.

Pokud $z \in B_{ji} \cap S^{n+1}W$, nahradíme B_{ji} koulí

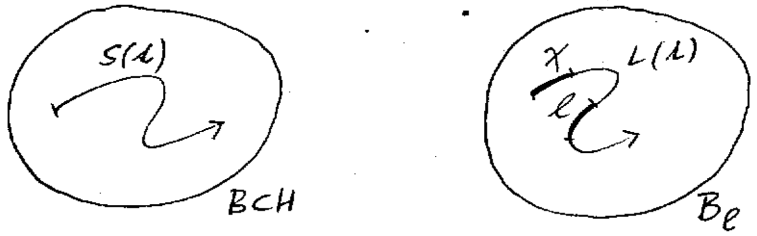
$$B_X(z, \frac{R}{2^{n+1}}) \supset B_{ji}$$



□

Poznámka. Konstrukce EA pro (NS)

$(S(t), H)$ $H = L^2(\Omega) \cap \{\operatorname{div} = 0\}$



1. krok: $L := L(\ell)$ má shlazovací vlastnost (T. 7.)

$\overset{V.10}{\Longrightarrow} \exists\, \mathcal{E}^*_\ell$ … EA pro (L^n, B_ℓ).

2. krok: $\mathcal{E}^* := \ell(\mathcal{E}^*_\ell)$

Potom $\mathcal{E}^*$ je EA pro (S^n, B), $S = S(\ell)$.

3. krok: $\mathcal{E} := \bigcup_{t \in \langle 0, \ell\rangle} S(t)\mathcal{E}^*$ je EA pro $(S(t), B)$

(Potřebujeme: $(t,u) \mapsto S(t)u$ je lipschitzovské)

Definice. $(S(t), X)$ … dynamický systém. Množina $M \subset X$ se nazve inerciální varieta, jestliže:

(i) M je kompaktní,

(ii) $S(t)M \subset M$ $\forall t > 0$,

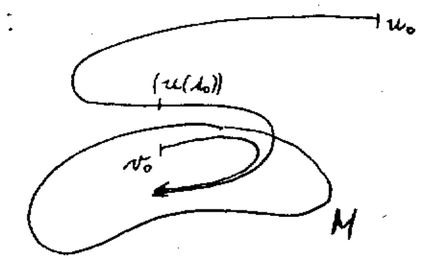
(iii) $\forall u_0 \in X\ \exists v_0 \in M\ \exists t_0 > 0: \|S(t+t_0)u_0 - S(t)v_0\| \le Ce^{-\gamma t}$ $\forall t \ge 0$

(iv) M je (lokálně) grafem lipschitzovské funkce z $\mathbb{R}^n$ do X.

Poznámka. M je (mnohem více než) ØEA.

(iv) $\Rightarrow d_F(M) \le 2n$.

(iii):



„asymptotická úplnost“.

Otázka 1. Konstrukce exponenciálního atraktoru, který je asymptoticky úplný.
(tj. vlastnost (iii) inerciální variety).

Opakování!

$x' = Ax + f(x,y)$

$y' = By + g(x,y)$

$\sigma(A) \subset \{Re\, z \geq 0\}$

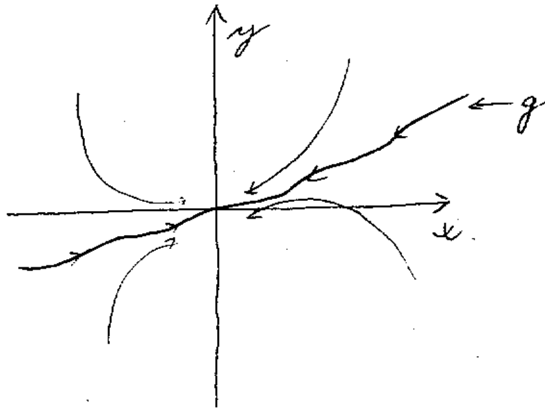
$\sigma(B) \subset \{Re\, z < -\beta\}$

$f(0,0) = g(0,0) = 0,$

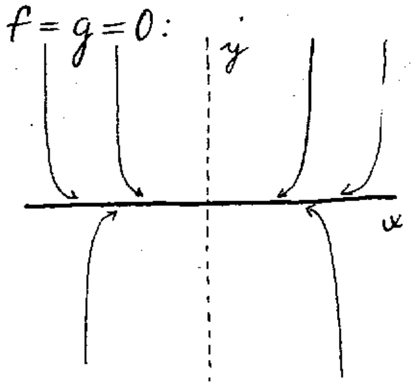
$f, g \in Lip_\sigma$, σ/β malé

Závěr: $\exists$ centrální varieta (lipschitz.)

$y = \Phi(x)$



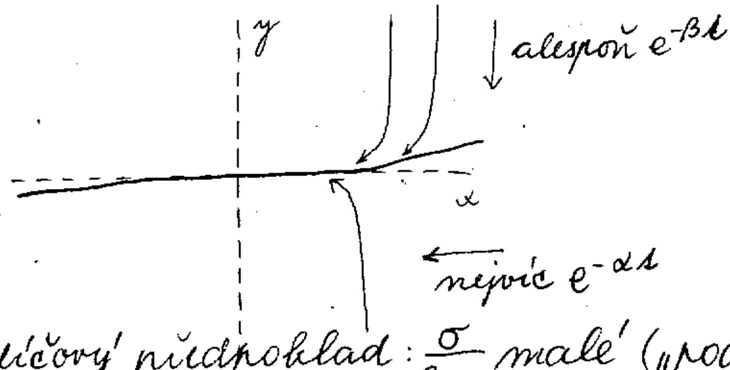
Idea: $f = g = 0$:



Malá porucha potom nepokazí rychlost poklesu.

Zobecnění! $\sigma(A) \subset \{Re\, z \geq -\alpha\} \cap \{Re\, z \leq 0\}$

$\sigma(B) \subset \{Re\, z < -\beta\}$



Klíčový předpoklad: $\frac{\sigma}{\beta - \alpha}$ malé („podmínka mezery ve spektru")

Aplikace. (PDR): $\frac{du}{dt} = \Delta u + R(u)$

$\sigma(-\Delta) = \{\lambda_1, \dots \lambda_N, \dots \to \infty\}$

$\{w_1, \dots, w_N, \dots\}$ příslušná ONB $(v\ \overset{H}{\overset{\|}{L^2(\Omega)}})$

$P^N : H \to H$ ON projekce na $Lin\{w_1, \dots w_N\}$

$Q^N = I - P^N$

(PDR) $\iff$ $x' = Ax + f(x,y)$

$y' = By + g(x,y)$

$x = P^N u$; $A = \Delta|_{P^N H}$; $\sigma(A) \subset \langle -\lambda_N, -\lambda_1 \rangle$

$y = Q^N u$; $B = \Delta|_{Q^N H}$; $\sigma(B) \subset (-\infty, -\lambda_{N+1} \rangle$

$f(x,y) = P^N R(x+y)$ $\quad u = x + y$

$g(x,y) = Q^N R(x+y)$

? spektrální mezera: $R \in Lip_L$, $\frac{L}{\lambda_{N+1} - \lambda_N}$ malé

$-\Delta$ na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omez.,

potom $\lambda_N \sim C(\Omega) N^{\frac{2}{n}}$

$\lambda_{N+1} - \lambda_N$ … omezené pro $N \to \infty$

jediná možnost je malá konstanta L, ale to není prakticky použitelné.

Poznámky. Podmínku spektrální mezery lze ověřit např. tehdy, když:

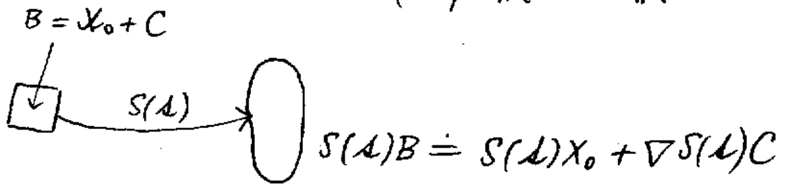
$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ n = 1 \\ \cdot\ L \text{ malé} \\ \cdot\ \Delta^2 \text{ místo } \Delta \end{array}\right\} \text{nezajímavé}$$

Otázka 2. Jiné metody konstrukce M, speciálně: $\exists$ inerciální varieta pro (NS) $(v\ \mathbb{R}^2)$?

Metoda Ljapunovských exponentů (2.5)

Lorenzovy rovnice: $X' = F(X)$; $X \in \mathbb{R}^n$

$S(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$



$\nabla S(t)$ … řešení rovnice ve variacích:

$U' = \nabla F(X(t))U$

$$vol(S(t)B) \doteq vol(\nabla S(t)C) = vol(L(t)C) =$$

$$\overset{\text{Liouville}}{=} vol(C) \cdot \exp\left(\int_0^t tr(A(s))\,ds\right)$$

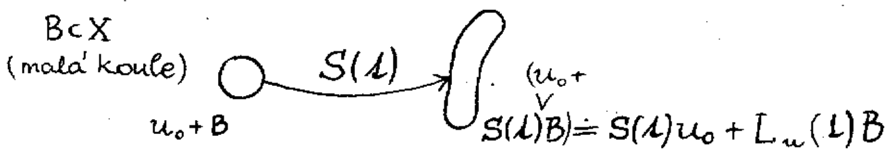
$\Rightarrow$ div $F = 0$: $(tr\,A = 0)$ $L(t), S(t)$ zachovává objem

div $F \le -\lambda < 0$: $vol(S(t)B) < vol(B)$ $\forall B \subset \mathbb{R}^n$

Důsledek: $A \subset \mathbb{R}^n$ invariantní $\Rightarrow vol(A) = 0$.
(např. atraktor)

(PDR) $\frac{du}{dt} = F(u)$ $u \in X$ (PDR) … $S(t): X \to X$
(PDR-var) … $L_u(t): X \to X$

(PDR-var) $\frac{dU}{dt} = F'(u)U$



pokrytí $S(t)(u_0+B)$ ⇝ pokrytí $\underset{\underset{\text{lineární}}{\uparrow}}{L_u(t)B}$

Problém: „princip linearizace", tj. $L_u(t)$ je Fréchetův diferenciál pro $S(t)$

Lemma 2.5.1. X … Hilbert, $L \in K(X)$, B je jednotková koule v X. Potom LB je elipsoid, kde délky poloos jsou vlastní čísla $(LL^T)^{1/2}$

Důkaz. L^TL je kompaktní hermiteovský.
Tedy $\exists \{(e_i, \lambda_i)\}$, kde $\{e_i\}$ tvoří ON bázi X
a $L^TLe_i = \lambda_i e_i$.
$(Le_i, Le_j) = (L^TLe_i, e_j) = \lambda_i(e_i, e_j)$
$y_i = \lambda_i^{-1/2} Le_i$ … ON množina
$u \in B$ … $u = \sum_i u_i e_i$ $(u_i \in \mathbb{R})$, $\sum u_i^2 \le 1$
$Lu = \sum_i L(u_i e_i) = \sum \underbrace{u_i \lambda^{+1/2}}_{v_i} y_i$, $\sum v_i^2 \lambda_i^{-1} \le 1$
$\overset{\parallel}{\sum \frac{v_i^2}{(\lambda_i^{1/2})^2}} \le 1$ $\square$

Definice. $\alpha_i(L) := \lambda_i^{\frac{1}{2}}$
$\omega_m(L) := \alpha_1(L) \cdots \alpha_m(L)$
(+ předpoklady & značení lemmatu)

Lemma 2.5.2 $\mathcal{E} \subset X$ elipsoid s poloosami $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \ge \alpha_n$; $a > 0$ tak, že $\alpha_m < \alpha < \alpha_{m+1}$
$\Rightarrow N_X(\mathcal{E}, \sqrt{2}a) \le 3^m \frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_m}{a^m}$

Lemma 5: $N_{\mathbb{R}^m}(B_{\mathbb{R}^m}(0,R), r) \le 3^m \left(\frac{R}{r}\right)^m$ $R \ge r$

Lemma 2.5.5. (zobecněná Liouvilleova formule)
$\frac{dU}{dt} = A(t)U$; $U \in X$
$L(t): X \to X$ operátor řešení.
$\omega_m(L(t)) \le \exp\left(\int_0^t \sup_{P_m} tr[A(s)P_m]\,ds\right)$
P_m … ON projekce $P_m : X \to \mathbb{R}^n$
$tr[A; P_m]$ … stopa matice $P_mAP_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\overset{\parallel}{\sum_{i=1}^{m}} (A\phi_i, \phi_i)$; $\{\phi_i\}$ ON báze P_mX.

Aplikace.

(NS) $\quad \partial_t u + (u\cdot\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$

$\qquad\qquad \operatorname{div} u = 0$

$d=2$: $\exists!$ řešení; úplná regularita

(f, Ω hladké $\Rightarrow$ u hladké)

$\exists$ globální atraktor,

$$d_f(A) \le \begin{cases} c_0 \nu^{-4} \ln \nu^{-1} & \text{(trajektorie)} \\ c_0 \nu^{-2} & \text{(Ljapunov)} \end{cases}$$

$d=3$: $\exists$ řešení; $u \in L^\infty(0,T,H) \cap L^2(0,T,H^1)$

- jednoznačnost
- regularita
- existence atraktoru

model Ladyženské

(NS-r) $\quad \partial_t u + (u\cdot\nabla)u - \nu\Delta u - \mu|\nabla u|^{r-2}\nabla u + \nabla p = f$

$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \qquad \operatorname{div} u = 0$

Testujeme rovnici řešením:

$$\int_\Omega -\operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u)\, u \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^{r-2} \nabla u : \nabla u \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

$$u \in L^2(0,T,W^{1,r})$$

$d=3$, $r \ge 2{,}2 \Rightarrow \exists$ GA, $d_f(A) < \infty$

$r > 2{,}4 \Rightarrow \qquad d_f(A) \le c_0 \cdot \nu^{-\alpha} \mu^{-\beta}$ (trajektorie)

α, β relativně velká

Otázka 4. Vylepšení odhadu metodou trajektorií

Otázka 5. Použití ljapunovských exponentů pro (NSE-r), $d=3$.