6. TERMÍN – 25.9.2013

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.
Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte.
Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [**8b**] Je dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \ln\left(\frac{2x+n^2}{x+n^2}\right) \qquad x \geq 0.$$

(i) Vypočítejte bodovou limitu $f(x)$ pro každé $x \geq 0$ pevné
Nechť $0 < K < \infty$. Rozhodněte (a podrobně zdůvodněte), zda $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$
(ii) na intervalu $[0, K]$;
(iii) na intervalu $[K, \infty]$.
(iv) konverguje řada $\sum_n f_n(x)$ stejnoměrně na uvedených intervalech? Podrobně zdůvodněte svůj závěr.

---

2. [**7b**] Nalezněte všechny extremály úlohy

$$\Phi[y] = \int_1^e \left[\frac{x}{2}(y')^2 + \frac{2yy'}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right] dx,$$
$$y(1) = 1, \quad y(e) = 2.$$

Vyšetřete, zda se jedná o (lokální) extrémy.

---

3. [**9b**] Vyšetřete průběh funkce

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1-\exp(-ax)}{x\sqrt{1+x^2}}\, dx \qquad a > 0.$$

(i) Ukažte, že funkce je definována (integrál konverguje) pro každé $a > 0$ pevné.
(ii) Ukažte, že funkce je pro každé $a > 0$ diferencovatelná – hodnotu $F'(a)$ vyjádřete integrálem, který nevyčíslujte, avšak vyšetřete jeho znaménko.
(iii) Vypočítejte $\lim_{n\to\infty} F(n)$; výpočet podrobně odůvodněte.
(iv) Vypočítejte $\lim_{n\to\infty} F(1/n)$; výpočet podrobně odůvodněte.

---

4. [**8b**] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je zadána podmínkami

$$(x^2+y^2)^2 < 8xy$$
$$0 < x$$
$$0 < y$$

Vypočítejte průměrnou hodnotu x^2 v Ω, tj. integrál

$$\int_\Omega x^2\, dxdy$$

vydělte obsahem (dvourozměrnou mírou) Ω.

1. příklad [8b]

[1.5] ... bodová limita
[3] ... stejnoměrnost na [0,K]
[2] ... nestejnoměrnost na [K,\infty)
[1.5] ... Weierstrass

---

2. příklad [7b]

[2] ... sestavení E.L. rovnice
[1.5] ... obecné řešení
[0.5] ... okrajové podmínky -> extremála

[2] ... Jacobiho rovnice & její obecné řešení
[1] ... neex. konj. bod -> závěr: lok. minimum

---

3. příklad [9b]

[2] ... konvergence
[4] ... derivace (majoranta 2b)
[1.5] ... Levi
[1.5] ... Lebesgue

---

4. příklad [8b]

[3] ... parametrizace + Jakobián
[2] ... výpočet obsahu
[3] ... výpočet integrálu x^2

(1) $f_n(x) = \ln\left(\dfrac{2x+n^2}{x+n^2}\right)$

(i) $f_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{x+n^2}\right) \to \ln\left(1+\dfrac{x}{x+\infty}\right) = 0 =: f(x)$, $x \geq 0$.

(ii) $I = [0,K]$ <u>ANO</u>:

$$\sigma_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,K]} \left|\ln\left(1+\frac{x}{x+n^2}\right)\right|$$ dle: $\ln(1+y) \leq y$ pro $y \geq 0$

$$\leq \sup_{x\in[0,K]} \frac{x}{x+n^2} \leq \frac{K}{n^2}; \text{ tj: } \sigma_n \to 0,\ n\to\infty$$

(iii) $I = [K,\infty)$ <u>NE</u>:

$$\sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\geq K} \ln\left(1+\frac{x}{x+n^2}\right)$$ vol $x = n^2$

$$\geq \ln\left(1+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right) = \ln 3/2 \not\to 0.$$

(iv) ANO na $[0,K]$: Weierstrass; $a_n = \dfrac{K}{n^2}$; viz výše $\sum a_n < \infty$

NE na $[K,\infty)$: není splněna <u>nutná podmínka</u> ($f_n \not\rightrightarrows 0$)

(2) $f = \frac{\dot y^2}{2} t + \frac{2 y \dot y}{t} - \frac{y^2}{t^2}$; $[e^0, e^1]$ $\quad y(1) = 1$, $y(e) = 2$

$f_{\dot y} = \dot y t + \frac{2y}{t}$; $f_y = \frac{2\dot y}{x} - \frac{2y}{x^2}$

$$-\left(\frac{2y}{t}\right)'$$

$\mathcal{E}\text{-}\mathcal{L}.:$ $-\left(y'x + \frac{2y}{t}\right)' + \frac{2y'}{t} - \frac{2y}{x^2} = 0$

$(y'x)' = 0$

$y'x = A$

$y' = \frac{A}{t}$; $\boxed{y = A \ln x + B}$

---

okr. podm.: $A \ln 1 + B = 1$: $B = 1$

$A \cdot \ln e + B = 2$: $A = 1$. $\boxed{y = \ln x + 1}$

jediná extremála

$f_{\dot y \dot y} = x > 0$ na $[1, e]$ $\Rightarrow$? (lok.) minimum ?

$f_{y\dot y} = \frac{2}{t}$, $f_{yy} = -\frac{2}{x^2}$; z. $P(t) = x$

$Q(t) = \frac{-2}{x^2} - \left(\frac{2}{t}\right)' = 0$

(J) $(xu')' = 0$

výpočet výše: $u = C \ln x + D$

$u(1) = 0 \Rightarrow D = 0$;

u … netriviální $\Rightarrow C \neq 0$

$\Rightarrow \nexists$ konj. bod $\Rightarrow$ $\boxed{\text{nalezená extremála je lokální lok. min.}}$

③ $F(a) = \int_0^\infty \underbrace{\frac{1-e^{-ax}}{x\sqrt{1+x^2}}}_{f} dx \quad , \quad a>0$

(i) integrace; zj. $f(a,x)$ spojité v $x\in(0,\infty) \Rightarrow$ měřitelné

ověř. řešit pro $x\to 0+$ resp. $x\to\infty$.

(α) $x\to 0+$: $\frac{1-e^{-ax}}{+ax}\cdot a \to a$, dle $\frac{e^y-1}{y}\to 1, y\to 0$

zj. $f(a,x)\sim 1$; $1\in L^1(0,\delta)$

(β) $x\to\infty$: $f(a,x)\sim \frac{1}{x^2}\in L^1(K,\infty)$

řádové rovnost: ověření: $x^2 f(a,x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(1-\underset{\substack{\downarrow\\0}}{e^{-ax}})$

$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}(1-e^{-ax}) \to 1$

(ii) formálně $F'(a) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} f(a,x)dx = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

ověření záměny $\frac{\partial}{\partial a}, \int$: $f(a_0,\cdot)\in L^1(0,\infty)$ $\underline{a_0>0}$ libovolné...

měřitelnost, existence $\frac{\partial f}{\partial a}$ ... jasné, viz výše

majoranta : $a\in(\alpha,\infty) =: I$, $\alpha>0$ ..(stačí)

$\left|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right| = \frac{e^{-ax}}{\sqrt{1+x^2}} \le \boxed{e^{-\alpha x}} \in L^1(0,\infty)$;

$\forall\, a\in(\alpha,\infty)$

(3iii) $F(n) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-nx}}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx \xrightarrow{(\alpha)} \int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx \overset{(\beta)}{=} \infty$

(α) ... ověření záměny lim, $\int$: Leviho věta:

$0 \le f(n,x) \nearrow \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$; neboť $-e^{-nx} \nearrow 0$

(β) $\int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \ge \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \ge \int_0^1 \frac{dx}{2x} = \infty$.

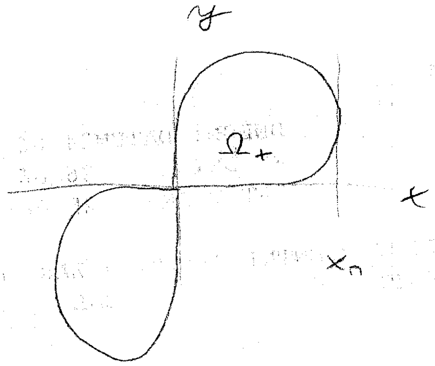
(3iv) $F\left(\frac{1}{n}\right) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\frac{x}{n}}}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx \xrightarrow{(\gamma)} \int_0^\infty 0\,dx = 0$

(γ) ... ověření záměny: Lebesgueova věta

$f\left(\frac{1}{n},x\right) \le f(1,x) \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$ ... viz výše

neboť $\left|1-e^{-\frac{x}{n}}\right| \le 1-e^{-x}$.

(4) $(x^2+y^2)^2 < 8xy$



polární souř.: $x = r\cos u$

$\boxed{J = r}$ $y = r\sin u$

$(r^2)^2 < 8r^2 \cos u \sin u$

$r^2 < 4 \sin 2u \qquad u \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

---

osile: $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 8xy \qquad (1+y^2)^2 = 8y$

$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2(x^2+y^2)\cdot 2x - 8y \quad ; \; y = kx$

... ?!

2

$$\lambda_2(\Omega_+) = \int_{\Omega_+} dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{2\sqrt{\cos 2u}} r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\, 4 \sin 2u\, du$$

2

$$= \left[-\cos 2u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

$$\int_{\Omega_+} x^2\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^{\sqrt{4\cos 2u}} r^3 \cos^2 u\, dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \cos^2 u \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{4\cos 2u}}$$

$$= 4 \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \cdot \cos^2 2u\, du}_{\frac{\pi}{8}} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u (\cos^2 u - \sin^2 u)^2 du$$

$$\left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 4u}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \qquad \Sigma = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4}} = 0.7853..$$