4. TERMÍN – 8.2.2010

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. Je dána posloupnost funkcí
$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^n}.$$
(a) Najděte *bodovou* limitu $f(x)$ pro $x \geq 0$.
(b) Rozhodněte (podrobně zdůvodněte), pro která $\delta > 0$ platí $f_n \rightrightarrows f$ v $[0,\delta]$.
(c) Rozhodněte (podrobně zdůvodněte), pro která $K > 0$ platí $f_n \rightrightarrows f$ v $[K,\infty)$.

---

2. Nalezněte všechny extremály úlohy
$$\Phi[y] = \int_0^1 e^x (y' - x)^2 + 2y\,dx$$
$$y(0) = 1, \quad y(1) = 1/2.$$
Vyšetřete, zda se jedná o (lokální) extrémy.

---

3. Nechť
$$f(a,x) = \frac{e^{-ax^3} - \cos x}{x^2}.$$
(a) Dokažte podrobně, že integrál $\int_0^\infty f(a,x)\,dx$ konverguje pro každé $a > 0$.
(b) Dokažte (ověřením předpokladů patřičné věty), že výše uvedený integrál je diferencovatelnou funkcí parametru $a \in (0,\infty)$.
(c) Rozveďte do řady integrál $\int_0^1 x^{-1/2} f(0,x)\,dx$.

---

4. Spočítejte integrál 2. druhu
$$\int_P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$
kde
$$\mathbf{F} = \frac{(x, y, 1-z)}{x^2 + y^2 + (1-z)^2}$$
a P je průnik kuželové plochy a vnitřku válce, určený vztahy
$$\left\{z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}\right\} \cap \left\{z^2 + y^2 < 1\right\},$$
orientovaný *dovnitř*.

1. příklad [8b]

[1] ... bodová limita

[2] ... kde NENÍ konvergence stejnoměrná (oba případy dohromady)

[2.5] ... stejn. konvergence v (0,d), d<1
[2.5] ... stejn. konvergence v (0,K), K<1

---

2. příklad [8b]

[2] ... sestavení E.L. rovnice
[2] ... obecné řešení
[1] ... okrajové podmínky -> extremála

[2] ... sestavení Jacobiho rovnice,
[1] ... neex. konj. bod -> závěr: lok. maximum

---

3. příklad [9b]

(a) ... [2.5]

(b) [1] ... měřitelnost vůči 'x' & diferencovatelnost vůči 'a'
[3] ... majoranta: + ověření integrovatelnosti

(c) [1] ... rozvoj do řady
[1.5] ... ověření záměny

---

4. příklad [7b]

[2] ... parametrizace + Jakobián
[2] ... správné určení mezí (r,u) & ověření orientace

[1] ... dosazení + aplikace Fubiniho
[2] ... dopočet posledního 1d integrálu

(1) (a) $x^n \longrightarrow \begin{cases} 0; & x \in [0,1) \\ 1; & x = 1 \\ +\infty; & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x & ; x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & ; x = 1 \\ 0 & ; x > 1. \end{cases}$

(b) f_n ... spojité v $[0, +\infty)$

f ... nespojité v $x_0 = 1$ (zleva i zprava!)

$\Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$ v $[0, \delta]$; $\delta \geq 1$

ani v $[K, +\infty)$; $K \leq 1$.

---

snažíme: $f_n \rightrightarrows f$ v $[0, \delta]$; pro $\forall\, 0 < \delta < 1$ jsou?

$$\sigma_n = \sup_{x \in [0,\delta]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,\delta]} \left| \frac{x}{1+x^n} - x \right|$$

leč: $\left| \frac{x}{1+x^n} - x \right| = \left| x\left(\frac{-x^n}{1+x^n}\right) \right| = \underbrace{\frac{x}{1+x^n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|x^n|}_{\leq \delta^n} \leq \delta^n$

tedy: $0 \leq \sigma_n \leq \delta^n$; $\Rightarrow \sigma_n \to 0$; $n \to \infty$. O.K.

(c) snažíme: $f_n \rightrightarrows f$ v $[K, +\infty)$; $\forall K > 1$ jsou?

$$\sigma_n = \sup_{x \geq K} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq K} \left| \frac{x}{1+x^n} - 0 \right|;$$

leč: $\left| \frac{x}{1+x^n} \right| = \frac{x}{1+x^n} < \frac{x}{x^n} = x^{1-n} \leq K^{1-n}$;

tedy: $0 \leq \sigma_n \leq K^{1-n} \to 0$; $n \to \infty$ O.K.

(2)

$$\phi(y) = \int_0^1 e^x (y'-x)^2 + 2y \, dx \qquad y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

$$f = e^x (r-x)^2 + 2y$$

c.37/p.227 $f_r = e^x 2 (r-x)$

$f_y = 2$

E.L.

$$\left(2e^x (y'-x)\right)' - 2 = 0$$

$$2e^x (y'-x) + e^x (y''-1) - 2 = 0$$

$$\boxed{y'' + y' = 2e^{-x} + (x+1)}$$

F.S.: $\{1, e^{-x}\}$

$y_{p2} = Ax^2 + Bx$

$y_{p2}' = 2Ax + B$

$y_{p2}'' = 2A$

$2A + 2Ax + B = x + 1$

$2A + B = 1$

$2A = 1$

$A = \frac{1}{2}; \; B = 0.$

$y_p = xAe^{-x}$

$y_p' = Ae^{-x}(1-x)$

$y_p'' = Ae^{-x}(x-1-1) = Ae^{-x}(x-2)$

$A(1-x+x-2) = 2$?

$A = -1$. (5)

$y_0 = c + de^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - xe^{-x}$

$y_0(0) = 1 = c + d$

$y(1) = \frac{1}{2} = c + e^{-1}(d-1) + \frac{1}{2}$

1. ec: $d - 1 = -c$

$\to \quad \frac{1}{2} = c(1 - e^{-1}) + \frac{1}{2}$

$c = 0; \; d = 1$

$$\boxed{y_{ext} = \frac{1}{2}x^2 + e^{-x}(1-x)}$$

$P = f_{rr} = 2e^x > 0$? lok. min.

$Q = f_{yy} - (f_{yr})' = 0.$

(J) $(e^x u')' = 0$

$u'' + u' = 0 \ldots$ monot. ∄ konj.

$u = A + Be^{-x}$ $\boxed{\text{lok. max.}}$ x

Jungmannova 17 / 110 00 Praha 1 / Czech Republic
tel./fax / + 420 – 224 237 769
e-mail / info@cevro.cz // www.cevro.cz

(3) (a) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^3} - \cos x}{x^2} dx = \int_0^{\delta} \dots + \int_{\delta}^{+\infty} \dots = I_1 + I_2.$

$|f(a,x)| \le \frac{|e^{-ax^3}| + |\cos x|}{x^2} \le \frac{2}{x^2}$; $\int_{\delta}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty \Rightarrow I_2$ konv. $(\forall \delta > 0)$.

$f(a,x) \sim 0;\ x \to 0. \Rightarrow I_1$ konv.; δ malé.

ověření: $\frac{e^{-ax^3} - \cos x}{x^2}$ .. l'Hosp. $0/0$ .. $\frac{-3ax^2 e^{-ax^3} + \sin x}{2x} \to \frac{1}{2}$.

(b) $f(a,\cdot)$ měřitelná v $(0,+\infty)$ ← spojité

$\frac{\partial f}{\partial a} = -x e^{-ax^3};\ \forall a > 0;\ x > 0.$

?? majoranta: $\sup_{a>0} \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \sup_{a>0} x e^{-ax^3} = x \notin L(0,+\infty).$

— omezíme se na $a \in (\delta,+\infty)$; $\delta > 0$ pevné.

$g(x) := \sup_{a>\delta} \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \sup_{a>\delta} x e^{-ax^3} = x \cdot e^{-\delta x^3}.$

? $g \in L(0,\infty)$: $\int_0^{\infty} g = \int_0^K + \int_K^{\infty} = I_1 + I_2$;

$I_1 < \infty$ (g spojité → omezená na $[0,K]$)

$I_2 < \infty$; neboť $\underset{x>1}{g(x) \le x e^{-\delta x}} = \underbrace{x \cdot e^{-\frac{\delta x}{2}}}_{\substack{\le 1;\\ x \ge K \text{ velké}}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{\delta}{2}x}}_{\in L(0,+\infty)}$

celkem: $\frac{d}{da}\int_0^\infty f(a,x)\,dx = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\,dx$; $\forall a>\delta$

... $\delta>0$ libovolné: platí pro $a\in(0,+\infty)$.

(c) $x^{-\frac{1}{2}} f(0,x) = x^{-\frac{3}{2}}(1-\cos x)$; $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-3/2}}{(2k)!}$$

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} f(0,x)\,dx = \int_0^1 \sum_{k=1} \dots \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}x^{2k-3/2}\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\int_0^1 x^{2k-3/2}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!\,(2k-\ \ )}.$$

ověření (*): Levi: nelze; $f_k \not\geq 0$.

<u>Lebesgue:</u> ANO: „leibnizovská suma":

$f_k(t) = (-1)^{k+1} h_k(t)$; $h_k(t) \geq h_{k+1}(t) \geq 0 \ \forall k$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\right| \leq |h_1(t)| = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \in L(0,1).$$

$\forall n \geq 1$ ..

(4)

$$\underset{\sim}{\varphi}: \begin{array}{l} x = r\cos u \\ y = r \sin u \\ z = 1 - r \end{array} \qquad \dots \qquad y^2 + z^2 < 1$$

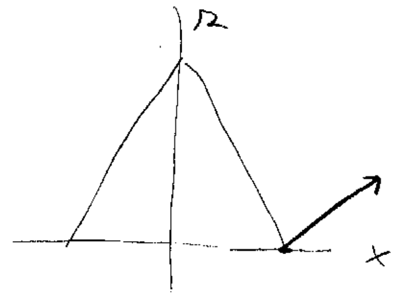
$$r^2 \sin^2 u + 1 - 2r + r^2 < 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < r < \dfrac{2}{1+\sin^2 u} \\ u \in (0, 2\pi) \end{array}} \quad \Omega$$

$$\partial_r \varphi = (\cos u, \sin u, -1)$$

$$\partial_u \varphi = (-r \sin u, r\cos u, 0)$$

$$\partial_r \varphi \times \partial_u \varphi = (r\cos u, r \sin u, r)$$



? orientace: $\begin{array}{l} r = 1 \\ u = 0 \end{array}$: $\underset{\sim}{\varphi} = (1, 0, 0)$, $d\underset{\sim}{S} = (1, 0, 1)$ -- **ven** → ověřit znamení...

$$\underset{\sim}{F} = (x, y, 1-z) / (x^2 + y^2 + (1-z)^2)$$

$$\underset{\sim}{F} \circ \underset{\sim}{\varphi} = (r\cos u, r \sin u, r) / (r^2 \cos^2 u + r^2 \sin^2 u + r^2)$$

$$I = -\iint_\Omega \boxed{1}\, dr\, du = -\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{2}{1+\sin^2 u}} dr \right) du = -2 \int_0^{2\pi} \frac{du}{2 + \sin^2 u}.$$

subst.: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \dots = \int_{-\pi}^{\pi} \dots = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{2+\sin^2 u}$ $\Bigg|$ $t = \operatorname{tg} u \in (-\infty, \infty)$; $\sin^2 u = \dfrac{t^2}{1+t^2}$; $du = \dfrac{dt}{1+t^2}$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2 + \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{3t^2 + 2} = 2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3 \cdot 2}}$$

celkem: $\boxed{\dfrac{-4\pi}{\sqrt{6}}}$