4. TERMÍN – 12.2.2013

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte.

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [8.5b] Je dáno $\delta \in (0,1)$ a řada funkcí

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{1+k+k^2(x+1)}$$

Rozhodněte, zda řada konverguje (a) *stejnoměrně* (b) *absolutně stejnoměrně*
(i) v intervalu $[-\delta, \delta]$
(ii) v intervalu $[-1, -\delta]$
(iii) v intervalu $[\delta, 1]$

---

2. [7.5b] Nalezněte všechny extremály úlohy

$$\Phi[y] = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \left[4y^2 - (y')^2 - 4028y'y - 2y\sin x\right] dx,$$
$$y(0) = 1, \quad y(3\pi/4) = 0.$$

Vyšetřete, zda se jedná o (lokální) extrémy.

---

3. [9b] Je dána funkce

$$F(a) = \int_0^1 \frac{x^{a+1} - x}{\ln x}\, dx$$

(i) vyšetřete, pro která $a \in \mathbb{R}$ je hodnota $F(a)$ konečná
(ii) vypočítejte ve výše nalezeném oboru $F'(a)$ derivováním podle parametru
  – ověřte podrobně předpoklady příslušné věty
(iii) dopočítejte $F(a)$ zpětnou integrací dle a

---

4. [7b] Spočítejte *průměrnou vzdálenost* bodu množiny

$$M := \left\{x^2 + y^2 + z^2 < R^2\right\} \cap \left\{x > |y|\right\}$$

od roviny $x = 0$. Jinými slovy :
(i) spočítejte $\int_M |x|\, dxdydz$
(ii) vydělte výsledek objemem množiny M

1. příklad [8.5b]

[2] ... Weierstrass − geom. řada
[4] ... Dirichlet + neabsolutní (3+1)
[2.5] ... Weierstrass − suma 1/k^2

---

2. příklad [7.5b]

[2] ... sestavení E.L. rovnice
[1] ... obecné řešení
[1.5] ... okrajové podmínky -> extremála

[1] ... Jacobiho rovnice & její obecné řešení
[2] ... _existuje_ konj. bod -> závěr: neex. (ani lok.) extr.

---

3. příklad [9b]

[4] ... konečnost integrálu (1+1+2)
[3.5] ... derivace dle parametru (majoranta 2.5)
[1.5] ... integrace včetně správné konstanty

---

4. příklad [7b]

[4.5] ... parametrizace, výpočet integrálu
[2.5] ... míra množiny, správný výsledek

① $\sum f_k(x)$, $\quad f_k(x) = \dfrac{x^k}{1+k+k^2(x+1)}$

$\delta \in (0,1)$ dáno

(i) $[-\delta, \delta]$: ano – absolutně stejnoměrně ; Weierstrass

$$|f_k(x)| = \frac{|x|^k}{1+k+k^2|x+1|} \le \frac{\delta^k}{1}\ ; \quad \sum \delta^k \text{ konv.}$$

(geometr. ř.)

(ii) $[-1, -\delta]$: konv. stejn. dle Dirichleta

$\sum x^k \ldots$ stejn. omezené částečné součty $\quad s_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$\dfrac{1}{1+k+k^2(x+1)}$ · které pro $\forall x$ jsou (neboť $x+1>0$) $\qquad |s_n(x)| \le \dfrac{2}{|1-x|} \le \dfrac{2}{1+\delta}$.

$| \qquad | \le \dfrac{1}{k+1}$, tj. $\rightrightarrows 0$ stejnoměrně

$\sum f_k$ nekonv. abs. stejn. na $[-1, -\delta]$;

neboť nekonv. abs. pro $x = -1$ $\quad \left(f_k(-1) = \dfrac{(-1)^k}{1+k} \right)$

(iii) $[\delta, 1]$: ano, absolutně stejnoměrně : Weierstrass

$$|f_k(x)| \le \frac{1}{k^2}\ ; \quad \sum \frac{1}{k^2} \text{ konv. } (2>1)$$

neboť $x+1 \ge 1$; tj. jmenovatel $\ge k^2$.

(2) $f = 4y^2 - r^2 - 4028\, y r - 2y \sin x$

E.L. $\quad (-f_r)' + f_y = 0$

$$(2y' + \cancel{4028 y})' + 8y - \cancel{4028 y'} - 2\sin x = 0$$

$$y'' + 4y = \sin x$$

F.S.: $\{\sin 2x, \cos 2x\}$

$y_p = A\sin x + B\cos x \quad \Rightarrow \quad 3A\sin x + 3B\cos x = \sin x$

$y_p'' = -A\sin x - B\cos x \qquad B = 0,\ A = \frac{1}{3}$

$y_{obecné} = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \frac{1}{3}\sin x$

$y_0(0) = 1 = c_2 \qquad \Rightarrow \exists!$ extremála:

$y_0\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0 = -c_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}} \qquad y = \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin 2x + \cos 2x + \frac{1}{3}\sin x$

J.: $f_{rr} = -2 < 0$ … podezření na lok. maximum

$f_{ry} = -4028$

$f_{yy} = 8$

Jacobiho rce: $-(f_{rr}\cdot u')' + (f_{yy} - (f_{yr})')u = 0$

$$u' + 4u = 0$$

$$u = d_1 \cos 2x + d_2 \sin 2x$$

zvol. $u = \sin 2x$ … netriviální

$= 0$ pro $x = 0, \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4}$

J.: $\frac{\pi}{2}$ je konjugovaný bod

nalezená extremála není (ani lokální) extrém $\Leftarrow$

③ $F(a) = \int_0^1 \underbrace{\frac{x^{a+1} - x}{\ln x}}_{f(a,x)} \, dx$ ...

(i) $f(a,\cdot)$ spojité ($\Rightarrow$ měřitelné) v $(0,1)$ pro $\forall a$ zřejmé

tedy $\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(a,x)\,dx$ konverguje vždy.

$x \to 1-$: $x \to 1$; $\frac{x^a - 1}{\ln x}$ l'Hosp. „$\frac{0}{0}$": $\frac{a x^{a-1}}{\frac{1}{x}} \to a$

tj.: $f(a,\cdot)$ omezené na $(\delta_2, 1)$; int. konv.

$x \to 0+$: $f = \frac{x^{a+1}}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} = f_1 + f_2$.

$f_2 \to 0$; tj. $\int_0^{\delta_1} f_2$ jistě konverguje.

$|f_2| \le c x^{a+1}$ pro x blízké $0+$ $\left(\frac{1}{\ln x} \to 0\right)$

tedy $a+1 > -1$

$a > -2$ jistě stačí na konvergenci

$a \le -2$: ukážeme, že $\int_0 \frac{x^{a+1}}{\ln x} dx = -\infty$.

$a = -2$: $\int_0^{\delta_1} \frac{dx}{x \ln x} = \left[\ln|\ln x|\right]_0^{\delta_1} = \ln|\ln \delta_1| - (-\infty) = +\infty$

$a < -2$: $\int_0^{\delta_1} f_2 = \int_0^{\delta_1} x^{a+\varepsilon+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^\varepsilon \ln x}}_{< -1 \text{ blízko } 0 \; (x^\varepsilon \ln x \to 0-)} dx < -\int_0^{\delta_1} x^{a+\varepsilon+1} dx = -\infty$.

volme $\varepsilon > 0$

$a + \varepsilon < -2$

(ii) uvažuji $F(a)$ v $I = (-2, +\infty)$

$$F'(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} f(a,x)\,dx = \int_0^1 x^{a+1}\,dx = \frac{1}{a+2}$$

ověření: $f(a,\cdot)$ měřitelné v $(0,1)$ ← zřejmé

$\exists \frac{\partial f}{\partial a} \in \mathbb{R}$ o.k.

$\exists a_0 \in I$ t.ž. $F(a_0) \in \mathbb{R}$: např. $a_0 = 0$

?? !! $\exists$ majoranta $h(x) \in \mathcal{L}(0,1)$; $\left|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right| \le h(x)$ $\forall a \in I$; s.v. $x \in (0,1)$.

nejmenší majoranta $\bar{h}(x) = \sup_{a>-2} x^{a+1} = x^{-1} \notin \mathcal{L}(0,1)$

trik: $\tilde{I} = (-2+\Delta, \infty)$; $\Delta > 0$ dané

$\Rightarrow h(x) = x^{\Delta-1} \in \mathcal{L}(0,1)$; je to majoranta

Pozn.: $x^{a+1} = \exp((a+1)\cdot \underbrace{\ln x}_{<0})$ -- klesá vzhledem k a.

Tj. větu lze použít na $(-2+\Delta, +\infty)$; $\Delta > 0$ libovolné, tedy platí na $(-2, +\infty)$.

(iii) $F'(a) = \frac{1}{a+2}$

$F(a) = \ln|a+2| + c$

$F(0) = 0 = \ln 2 + c$; $\Rightarrow c = -2$; tj: $\boxed{F(a) = \ln\left(\frac{a+2}{2}\right)}$

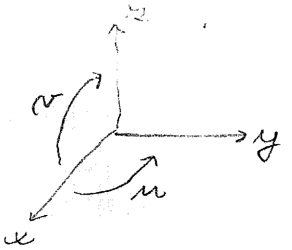
④ polární souřadnice

$x = r\cos u \cos v$

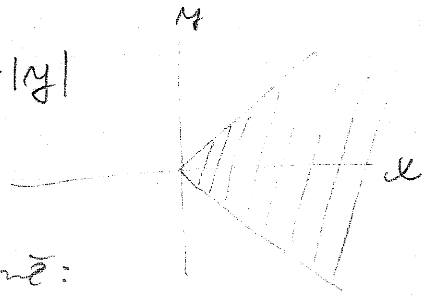
$y = r \sin u \cos v$

$z = r \sin v$

$J = r^2 \cos v$



názorně: $x > |y|$



početně: $\cos u > |\sin u|$

tj. $\cos u > 0$: $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$1 > |\operatorname{tg} u|$: $\boxed{u \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \quad v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad r \in (0, R)}$ — Ω

(i) $\displaystyle\int_M |x| \, dx\,dy\,dz = \int_\Omega |r \cos u \cos v| \cdot r^2 \cos v \, du\,dv\,dr =$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos u \, du \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v \, dv \cdot \int_0^R r^3 \, dr = I_1 \cdot I_2 \cdot I_3 .$$

$I_1 = [\sin u]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$; $I_3 = \frac{R^4}{4}$

$I_2 = \frac{1}{2} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 v + \sin^2 v) \, dv = \frac{\pi}{2}$; celkem $\frac{\pi R^4}{4\sqrt{2}}$

(ii) M je zjevně 1/4 koule ; tj. $\lambda_3(M) = \frac{1}{3} \pi R^3$

celkem: $\frac{\pi R^4}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{1 \pi R^3} = \frac{3R}{4\sqrt{2}} = 0.530 \ldots \times R$