19. Křivkový integrál.

Značení. Tučným fontem značíme vektory $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. Norma vektoru $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, skalární součin $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

Definice. Množina $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ se nazve jednoduchá křivka, jestliže existuje $\boldsymbol{\varphi}(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ takové, že

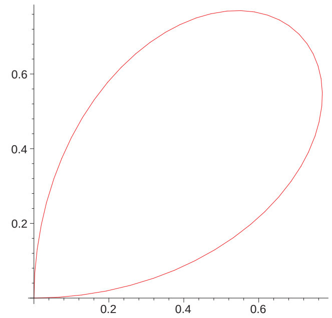
$$\gamma = \boldsymbol{\varphi}([a, b]) = \{\boldsymbol{\varphi}(t);\ t \in [a, b]\},$$

s těmito vlastnostmi:
(i) $\boldsymbol{\varphi}(t)$ je spojité a prosté v $[a, b]$
(ii) $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ je spojité v (a, b) a $\boldsymbol{\varphi}'(t) \neq \mathbf{0}$ pro $\forall t \in (a, b)$

Množina $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá jednoduchá uzavřená křivka, jestliže místo (i) požadujeme
(i') $\boldsymbol{\varphi}$ je spojité v $[a, b]$, prosté v $[a, b)$ a $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$.

Terminologie: Dvojice $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ se nazývá parametrizace křivky. Alternativní terminologie (kterou my nepoužíváme) nazývá dvojici $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ křivkou, a γ je „geometrický obraz křivky". V případě neuzavřené křivky se $\boldsymbol{\varphi}(a)$, $\boldsymbol{\varphi}(b)$ nazývají krajní body.

Příklady. ① $\gamma = \{(x^2 + y^2)^{3/2} = 2xy,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$, polární parametrizace $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\sin(2t)\cos(t), \sin(2t)\sin(t))$, $t \in [0, \pi/2]$. (Viz obrázek.)



②. Graf C^1 funkce $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ je křivka v R^2, parametrizace $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, f(t))$, $g \in [a, b]$.

Definice. Množina $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá zobecněná křivka, jestliže existují jednoduché křivky γ_j, $j = 1, \ldots, m$ tak, že
(i) $\gamma = \bigcup_{j=1}^m \gamma_j$,
(ii) po vynechání krajních bodů jsou γ_j vzájemně disjunktní.

Terminologie: $\{\gamma_i\}_{j=1}^m$ nazýváme přípustný rozklad křivky γ (není určen jednoznačně.)

Definice. [Integrál 1. druhu] Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je křivka a $f(x) : \gamma \to \mathbb{R}$ daná funkce. Integrál prvního druhu funkce f přes křivku γ značíme $\int_\gamma f\, ds$ a je definován takto:
1. Je-li γ jednoduchá křivka, pak

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|\, dt,$$

kde $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ je libovolná parametrizace γ.
2. Je-li γ zobecněná křivka, potom

$$\int_\gamma f\, ds = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f\, ds,$$

kde $\{\gamma_i\}_{j=1}^m$ je libovolný přípustný rozklad γ.

Lemma 19.1. [O reparametrizaci.] Nechť γ je jednoduchá (neuzavřená) křivka. Nechť $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$, $(\boldsymbol{\psi}, [c, d])$ jsou dvě různé její parametrizace.

Potom existuje vzájemně jednoznačná funkce $\omega(\tau) : [c,d] \to [a,b]$; přičemž $\omega(\tau)$ je spojitá v $[c,d]$, $\omega'(\tau)$ je konečná a nenulová v (c,d) a

$$\boldsymbol{\varphi}(\omega(\tau)) = \boldsymbol{\psi}(\tau) \qquad \forall \tau \in [c,d]\,.$$

Opakování. [Věta o substituci v $\mathbb{R}$] Nechť $\omega(\tau) : (c,d) \to (a,b)$ je vzájemně jednoznačná funkce, přičemž $\omega'(\tau)$ je konečná a nenulová v (c,d). Potom

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_{\omega_{-1}(a)}^{\omega_{-1}(b)} g(\omega(\tau))\omega'(\tau)\,d\tau = \int_c^d g(\omega(\tau))|\omega'(\tau)|\,d\tau\,.$$

Věta 19.1.[1] Integrál prvního druhu nezávisí na parametrizaci, ani zvoleném rozkladu křivky.

Definice. [Orientace křivky.] Jednoduchá křivka je orientovaná, je-li určen směr probíhání. (U neuzavřené křivky to znamená určit počáteční a koncový bod (p.b., k.b.)
Zobecněnou křivku orientujeme tak, že zvolíme nějaký přípustný rozklad, a orientujeme jeho jednotlivé elementy (tzv. orientovaný rozklad.)

Poznámky. • parametrizace přirozeně vyjadřuje orientaci: směr probíhání $\boldsymbol{\varphi}(t)$ pro t rostoucí. Říkáme, že parametrizace je/není ve shodě s orientací křivky.
• jednoduchá křivka připouští jen dvě různé orientace. U zobecněné křivky je jich více - přípustný rozklad s m prvky umožňuje 2^m různých orientací.

Příklad. Nechť $\gamma = \{x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$, orientovaná proti směru hodinových ručiček. Dvě různé parametrizace: $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in [-1,1]$ a $\boldsymbol{\psi}(\tau) = (\cos\tau, \sin\tau)$, $\tau \in [0,\pi]$. Druhá je ve shodě s orientací křivky. (Pozn. k Lemmatu 19.1: $\omega(\tau) = \cos\tau$.)

Dodatek k L.19.1 $\omega'(\tau) > 0$ (resp. $\omega'(\tau) < 0$) pro každé $\tau \in (c,d)$, pokud $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ určují stejnou (resp. opačnou) orientaci.

Definice. [Integrál 2. druhu.] Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaná křivka, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \gamma \to \mathbb{R}^n$ daná (vektorová) funkce. Integrál 2. druhu funkce $\boldsymbol{F}$ po křivce γ značíme $\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{ds}$ a je definován takto:
1. Je-li γ jednoduchá, pak

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds} = \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t)\,dt\,,$$

kde $(\boldsymbol{\varphi}, [a,b])$ je libovolná parametrizace γ, která je ve shodě s orientací.
2. Je-li γ zobecněná křivka, potom

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds} = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds}\,,$$

[1] Důkaz pro jednoduchou křivku.

kde $\{\gamma_i\}_{j=1}^m$ je příslušný orientovaný rozklad γ.
Varianta značení: $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = F_1 dx + F_2 dy (+F_3 dz)$.

Věta 19.2. Integrál 2. druhu nezávisí na parametrizaci, je-li ve shodě s orientací. Není-li, vyjde s opačným znaménkem.

Definice. Řekneme, že (orientovaná zobecněná) křivka γ spojuje body $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$ („ jde od $\boldsymbol{x}_0$ do $\boldsymbol{x}_1$"), jestliže γ je určena orientovaným rozkladem $\{\gamma_i\}_{j=1}^m$, kde

(i) p.b. $\gamma_1 = \boldsymbol{x}_0$

(ii) k.b. $\gamma_j =$ p.b. γ_{j+1}, $j = 1, \dots, m-1$

(iii) k.b. $\gamma_m = \boldsymbol{x}_1$

Speciální případ: γ jednoduchá, orientovaná, p.b. $\gamma = \boldsymbol{x}_0$, k.b. $\gamma = \boldsymbol{x}_1$.
Pokud $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_1$ (tento případ nevylučujeme), jde o (zobecněnou) uzavřenou křivku.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazve křivkově souvislá, jestliže pro libovolné $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in M$ existuje křivka γ spojující $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$ taková, že $\gamma \subset M$.
Otevřená, křivkově souvislá množina se nazývá oblast.

Příklady. ① konvexní množina je křivkově souvislá
② $\mathbb{R}^2$ s vynechanou polopřímkou je nekonvexní, křivkově souvislá množina
③ $\mathbb{R}^2$ s vynechanou přímkou není křivkově souvislá

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektorová funkce. Funkce $U(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$ se nazve potenciál $\boldsymbol{F}$ v Ω, jestliže $U \in C^1(\Omega)$, a $\nabla U = \boldsymbol{F}$ v Ω, tj. $\frac{\partial}{\partial x_i} U(\boldsymbol{x}) = F_i(\boldsymbol{x})$ pro $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$, $i = 1, \dots, n$.

Lemma 19.2. [O integrálu potenciálního pole.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ daná vektorová funkce. Nechť $U(\boldsymbol{x})$ je potenciál $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ v Ω.
Potom pro libovolnou křivku $\gamma \subset \Omega$, jdoucí od $\boldsymbol{x}_0$ do $\boldsymbol{x}_1$, platí

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = U(\boldsymbol{x}_1) - U(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ daná vektorová funkce. Řekneme, že integrál z $\boldsymbol{F}$ nezávisí v Ω na cestě, jestliže

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_{\hat{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}\,,$$

pro libovolné dvě křivky γ, $\hat{\gamma} \subset \Omega$, spojující tytéž body $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$.

Věta 19.3. [O existenci potenciálu.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá vektorová funkce. Potom je ekvivalentní:

(1) $\boldsymbol{F}$ má v Ω potenciál

(2) integrál z $\boldsymbol{F}$ nezávisí v Ω na cestě

Poznámka. Integrál z $\boldsymbol{F}$ nezávisí v Ω na cestě, právě když $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = 0$ pro každou jednoduchou, uzavřenou křivku γ v Ω.

Definice. Tečný vektor křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ v bodě $\boldsymbol{x}$ definujeme

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) := \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|}\,,$$

kde $(\boldsymbol{\varphi}(t), [a,b])$ je libovolná parametrizace γ, a $t \in [a,b]$ je zvoleno tak, že $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$.

Poznámka. $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ nezávisí (až na znaménko) na zvolené parametrizaci. Není definován v krajních bodech (spojovacích bodech zobecněné křivky).
Ekvivalentně můžeme psát

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = \pm\frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|}\,,$$

znaménko + platí, pokud $\boldsymbol{\varphi}$ je ve shodě s orientací γ, a $\boldsymbol{T}$ chceme též ve směru orientace.

Věta 19.4.[Vztah integrálů 1. a 2. druhu.] Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaná křivka, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \gamma \to \mathbb{R}^n$. Potom

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_\gamma \big(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\big)\, ds\,,$$

kde $\boldsymbol{T}$ je tečný vektor ke γ, volený ve shodě s orientací.

Poznámka. Levá strana je integrál 2. druhu; pravá strana integrál 1. druhu (ze skalární funkce $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$.)

Poznámka. [Význam křivkových integrálů.]
① $\int_\gamma 1\, ds$ má význam délky křivky.
② je-li $\boldsymbol{F}$ pole (gravitační, elektrické), vyjadřuje $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ sílu, kterou překonává částice (jednotkové hmotnosti, náboje) pohybem po křivce, tedy $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}$ je (až na znaménko a patřičnou konstantu) práce, kterou pohybem po křivce vykonáme
③ Lemma 19.2 lze zapsat jako

$$\int_\gamma \nabla U \cdot \boldsymbol{ds} = U(\text{k.b. } \gamma) - U(\text{p.b. } \gamma)\,;$$

jde o variantu tvrzení “integrál derivace je přírustek funkce”.

Poznámky. • Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, značí $\overline{\Omega}$ uzávěr a platí $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, kde $\partial\Omega$ je hranice. • zdánlivě samozřejmý vzoreček

$$\int_a^b g'(t)\, dt = g(b) - g(a)\,,$$

nemusí platit, předpokládáme-li pouze g spojitá v $[a,b]$, g' je konečná a spojitá v (a,b). Integrál vlevo totiž dle úmluvy chápeme vždy jako Lebesgueův, a g' nemusí být za výše uvedených předpokladů Lebesgueovsky integrovatelná.

Vzoreček platí, pokud g' je nejen spojitá v (a, b), ale má navíc spojité rozšíření do krajních bodů. To motivuje následující definici.

Definice. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, říkáme, že f je C^1 v $\overline{\Omega}$, jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existují a jsou spojité v Ω, a navíc mají spojité rozšíření do $\overline{\Omega}$.

Poznámka. Ve zbytku kapitoly se omezíme na situaci v $\mathbb{R}^2$. (Některá zobecnění do vyšších dimenzí uvedeme v přístí kapitole; nejsou přímočará.)

Definice. Je-li γ křivka v $\mathbb{R}^2$, normálovým vektorem $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{x} \in \gamma$ rozumíme jednotkový vektor, kolmý na tečný vektor $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$. (Není definován tam, kde není definován $\boldsymbol{T}$; je určen až na znaménko.)

Poznámka. Je-li (α, β) vektor v $\mathbb{R}^2$, pak $(-\beta, \alpha)$ vznikne otočením o $\pi/2$ proti směru hodinových ručiček, zatímco $(\beta, -\alpha)$ je čtvrtotáčka ve směru hodinových ručiček.
Úmluva: ,,v kladném smyslu" znamená ,,proti směru hodinových ručiček".

Definice. Divergence resp. rotace pole $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se definuje jako

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Věta 19.5. [Gaussova.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ,,rozumná" oblast, $\boldsymbol{F} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ je C^1. Nechť $\partial\Omega$ je zobecněná křivka. Potom

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, d\lambda_2 = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, ds,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je normála k $\partial\Omega$, směřující ven z Ω (vnější normála.)

19.6. [Greenova.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ,,rozumná" oblast, $\boldsymbol{G} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ je C^1. Nechť $\partial\Omega$ je zobecněná křivka, orientovaná tak, že obíhá kolem Ω v kladném smyslu. Potom

$$\int_\Omega \operatorname{rot} \boldsymbol{G}\, d\lambda_2 = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{ds}.$$

Lemma 19.3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je C^1, a $\boldsymbol{F}$ má v Ω potenciál.
Potom $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ v Ω.

Poznámka. Zajímavější je obrácené tvrzení, tj. podmínka $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ (v praxi lehce ověřitelná) implikuje existenci potenciálu. Neobejde se však bez dodatečné podmínky na Ω.

Definice. Řekneme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá, má-li následující vlastnost: je-li $\gamma \subset \Omega$ uzavřená (zobecněná) křivka, tak množiny, které γ ohraničuje, leží též v Ω.
Ekvivalentně: γ lze spojitě stáhnout do bodu, aniž opustíme Ω.

Příklady. ① $B = \{x^2 + y^2 < 1\}$ je jednoduše souvislá.
② $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus B$ je souvislá, ale ne jednoduše.

③ konvexní množina je vždy jednoduše souvislá. $\mathbb{R}^2$ s vynechanou polopřímkou je jednoduše souvislá množina.

Věta 19.7. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast, $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je C^1, a $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ v Ω.
Potom $\boldsymbol{F}$ má v Ω potenciál.

Poznámka. Předpoklad jednoduché souvislosti nelze vynechat:

$$\boldsymbol{F} = \left(\tfrac{-y}{x^2+y^2}, \tfrac{x}{x^2+y^2}\right)$$

je C^1 v $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, splňuje zde $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$, přesto nemá v Ω potenciál. Sporem - nechť $\boldsymbol{F} = \nabla U$, potom díky Lemmatu 19.2. je integrál z $\boldsymbol{F}$ po každé uzavřené křivce roven nule. Ovšem snadno spočítáme, že integrál po kružnici obíhající počátek je nenulový.
Na každé jednoduše souvislé podmnožině $\hat{\Omega} \subset \Omega$ potenciál ovšem existuje; např. pro $\hat{\Omega} = \{x > 0\}$ máme $U = \operatorname{arctg}(y/x)$.