B1 $f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 1 ; & x \in (0,1) \\ e^{-1} ; & x = 1 \\ 0 ; & x > 1. \end{cases}$

f_n -- měřitelné (spojité v $(0,\infty)$).

$\int_0^\infty f_n \xrightarrow{(*)} \int_0^\infty f = \int_0^1 1 = 1$; $(*)$: Lebesgueova věta.

$|f_n(x)| \le g(x) = \begin{cases} 1 ; & x \in (0,1) \\ e^{-x} ; & x > 1. \end{cases}$

zjevně $g \in L(0,\infty)$, neboť $\int_0^\infty g = \int_0^1 1 + \int_1^\infty e^{-x} = 1 + \left(1 - \frac{1}{e}\right) < \infty$.

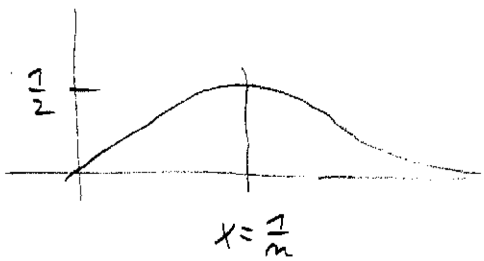
B2 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{x}{\frac{1}{n} + nx^2} \to \frac{x}{0 + \infty \cdot x^2} = 0 \quad \forall x \in (0,10)$.

$\int_0^{10} f_n \xrightarrow{(*)} \int_0^{10} 0 = 0$; $(*)$: Lebesgueova věta

$|f_n(x)| \le \frac{1}{2} \quad \forall n \ \forall x \in (0,1)$.

majoranta: $g(x) \equiv \frac{1}{2} \in L(0,10)$.

ověření: (a) přímý výpočet extrému



(b) $\left| \frac{ab}{a^2+b^2} \right| \le \frac{1}{2}$; polož $a = 1$

$b = nx$

B3 $f_n = \dfrac{1}{1+x+\frac{x^2}{n^2}}$; $f_n \ge 0$; měřitelné (spojité)

$f_n \le f_{n+1} \quad \forall n; \forall x \in (0,\infty)$.

Leviho věta: $\displaystyle\int_0^\infty f_n \longrightarrow \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n = \int_0^\infty \frac{1}{1+x} = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^\infty = +\infty.$

B4 $f_n = \dfrac{\operatorname{arctg}(nx)}{1+x^3}$; f_n .. měřitelné (spojité).

$\underbrace{\operatorname{arctg}(nx)}_{\text{rostoucí}}$ $\quad x>0$ pevné

rostoucí

$\left.\begin{matrix}\text{rostoucí} \\ \text{rostoucí}\end{matrix}\right\}$ vůči $\underline{n}$.

Leviho věta: $\displaystyle\int_0^\infty f_n \longrightarrow \int_0^\infty \frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^3} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

<u>pozn.:</u> $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x-2}{x^2-x+1}\right)$

$3\displaystyle\int \frac{1}{1+x^3} = \ln\frac{x+1}{(x^2-x+1)^{1/2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$ v $(0,+\infty)$.

<u>pozn 2:</u> lze použít také Lebesgueova věta

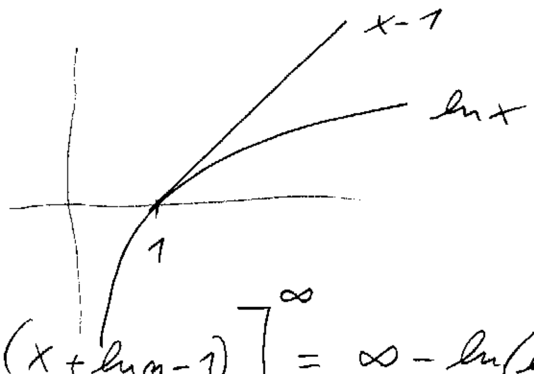
$|f_n(x)| \le \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{1+x^3} = g(x) \in L(0,+\infty)$. ; $\quad g(x) \le \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{x^3} \end{cases}$

$\displaystyle\int_0^\infty g = \frac{\pi}{2}\int_0^1 1 + \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x^3} = \frac{\pi}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) < \infty.$

B5 POZOR CHYTÁK $\quad f_n(x) = \frac{1}{\ln x + \ln n} \longrightarrow 0 \quad \forall x>1$ zřejmě.

f_n -- měřitelné (zřejmě).

leč: $\underline{\int_1^\infty f_n = +\infty} \not\to 0 = \int_1^\infty 0$.



ověřme: $\ln x \le x-1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\ln x+\ln n} \ge \int_1^\infty \frac{1}{x+\ln n-1} = \Big[\ln(x+\ln n-1)\Big]_1^\infty = \infty - \ln(\ln n) = \infty$$

(pro $\underline{n}$ zřejmě)

Pozn.: Levi - nelze ($f_n \searrow 0$)

Lebesgue - nelze ($\sup_n |f_n(x)| = f_1 \notin L(0,\infty)$).

B6 $\quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x^n}{1+(x^n)^2} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0; & x\in(0,1) \\ \frac{1}{2}; & x=1 \\ 0; & x>1. \end{cases}$

$$\int_0^\infty f_n \xrightarrow{(*)} \int_0^\infty f = 0 \quad (f=0 \text{ s.v.}).$$

majoranta: $|f_n(x)| = f_n(x) \le \begin{cases} 1; & x\in(0,1) \\ \frac{x^n}{x^{2n}} = x^{-n} \le x^{-2}; & x>1 \end{cases}$

$\underline{\underline{n \ge 2}}$.

$g(x) = \begin{cases} 1; & x<1 \\ \frac{1}{x^2}; & x>1. \end{cases}$

$g\in L(0,\infty)$; neboť $\int_0^\infty g = \int_0^1 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} = 1+1 < \infty$.

B7 $f_n(x) = \frac{\ln(x+n)}{n} \exp(-x)\cos x \to 0 \quad \forall x>0$ zřejmě.

$\int_0^\infty f_n \overset{(*)}{\to} \int_0^\infty 0 = 0$; ověření (*): Lebesgueova věta.

majoranta: $|\ln y| \le y-1 \quad \forall y \ge 1$; $|\cos x| \le 1$

$|f_n(x)| \le \frac{x+n-1}{n} \cdot e^{-x} \le \left(\frac{x}{n}+1\right)e^{-x} \le (x+1)e^{-x}$; $\forall n \ge 1$, $x>0$.

$(x+1)e^{-x} =: g(x)$

ověření $g \in L(0,\infty)$

(a) přímý výpočet $\int_0^\infty g$ (per-partes)

(b) $\int_0^\infty g = \int_0^K + \int_K^\infty = I_1 + I_2$;

I_1.. konverguje (g spojité $\Rightarrow$ omezená ; $(0,K)$ - omezený interval)

I_2: $g(x) = \underbrace{(x+1)\cdot e^{-\frac{x}{2}}}_{\to 0;\ x\to\infty} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \le 1 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \in L(K,\infty)$

a tedy ≤ 1 pro $x \ge K$ velké

B8 $f_n(x) = \frac{\exp(x^3)}{1+n\sqrt{x}} \to 0$; $x \in (0,23)$ zřejmě

$\int_0^{23} f_n \overset{(*)}{\to} \int_0^{23} 0 = 0$; ověření (*): Lebesgueova věta

$|f_n(x)| = \frac{\exp(x^3)}{1+n\sqrt{x}} \le \exp(23^3) \doteq 115069789\ldots\ldots$ (cca 5200 míst)

$\in L(0,23)$.