B. Vyšetřete spojitost funkce $F(a)$:

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp(-ax)}{1+x^3}\,dx, \quad a \geq 0$
2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^a}\,dx, \quad a > 2$
3. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi - x)^a}\,dx, \quad a < 2$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+a^2}, \quad a \in R$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-ax)\frac{\sin x}{x}\,dx, \quad a > 0$
6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x(a+x)^2}, \quad a > -1$

C. Derivováním podle parametru spočtěte integrály:

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\exp(-ax^2)}{x^2\exp(x^2)}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-x)\frac{\sin(ax)}{x}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-x)\frac{1-\cos(ax)}{x}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x(1+x^2)}\,dx$
$*$6. $\displaystyle\int_0^\infty \exp\left\{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}\right\}dx$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+a\sin x)}{\sin x}\,dx$
8. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}\,dx$

Věta: (i) $f(a,\cdot)$ je měřitelné pro $\forall a \in I$

(ii) $f(\cdot,x)$ je spojité pro s.v. $x \in J$

(iii) $\exists\, g(x) \in L(J)$ t.ž. $|f(a,x)| \le g(x)$ $\forall a \in I$, s.v. $x \in J$

$\Rightarrow$ $F(a) = \int_J f(a,x)\,dx$ je konečné a spojité v I.

Pozn. • v níže uvedených řešeních ověřujeme jen předpoklad (iii).

• často se opakuje tato úvaha: jsou-li $I = \bigcup_\alpha I_\alpha$ vesměs otevřené intervaly a $F(a) \in C(I_\alpha)$ $\forall \alpha \Rightarrow F(a) \in C(I)$.

(B1) $f(a,x) = \dfrac{\exp(-ax)}{1+x^3}$; $J = (0,\infty)$, $I = [0,\infty)$.

majoranta: $|f(a,x)| \le \dfrac{1}{1+x^3} =: g(x) \in L(0,\infty)$, např. díky odhadu $\underbrace{g(x) \le 1}$ na $(0,1)$ a $\underbrace{\le \frac{1}{x^3}}$ na $(1,\infty)$.

$\Rightarrow$ $F(a) \in C([0,\infty))$.

(B2) $f(a,x) = \dfrac{x}{1+x^a}$; $J = (0,\infty)$, $I = (2,+\infty)$.

pozorují: $x \ge 1$ -- nejmenší majoranta $\tilde{g}(x) = \sup\limits_{a>2} f(a,x)$

$$= \lim_{a\to 2+} \frac{x}{1+x^a} = \frac{x}{1+x^2} \notin L(1,\infty).$$

tedy: uvažuji $I_\Delta = (2+\Delta, +\infty)$, $\Delta > 0$; pro $a \in I_\Delta$

je jistě majoranta $g(x) = \begin{cases} 1; & x \in (0,1) \\ \dfrac{1}{x^{1+\Delta}}; & x > 1 \end{cases}$

díky odhadům $f(a,x) \le 1$ resp. $\dfrac{1}{x^{a-1}}$ na $(0,1)$ resp. $(1,+\infty)$

zjevně $g(x) \in L(0,\infty)$; tedy $F(a) \in C(I_\Delta)$; $\Delta > 0$ libovolné

$\Rightarrow F(a) \in C((2,\infty))$; neb $(2,\infty) = \bigcup\limits_{\Delta>0} I_\Delta$

(B3) $f(a;x)=\dfrac{\sin x}{x^a(\pi-x)^a}$; $a\in I=(-\infty,2)$, $J=(0,\pi)$.

(i) $a\in I_K=(-K,0]$; $K>0$ pevné ... snadný odhad:

$$|f(a,x)|=|\underbrace{(x(\pi-x))}^{-a}\sin x|\le\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2\right)^{-a}1\le\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{2K}=:g(x)$$

↑ maximum v bodě $x=\frac{\pi}{2}$.

$g(x)\in L(0,\pi)$ -- $F(a)\in C((-K,0])$; $K>0$ libovolné!

(ii) $a\in I_\Delta=[0,2-\Delta)$; $\Delta\in(0,2)$ pevné...

užijeme odhady: $|\sin x|\le|x|$,

$|\sin x|=|\sin(x-\pi)|\le|x-\pi|$

$\forall a\in I_\Delta$: $\underline{x}$, $\underline{\pi-x}\ge1$ pro $x\ge1$ resp. $x\le\pi-1$

$$\Rightarrow |f(a,x)|=\frac{|\sin x|}{|x|^a|\pi-x|^a}\le\frac{1}{1^a\,1^a}\le 1\ ;\ x\in(1,\pi-1)$$

$$\le\frac{|\sin x|}{|x|^a\,1^a}\le|x|^{1-a}\le|x|^{\Delta-1}\ ;\ x\in(0,1)$$

podobně: ... $\le|\pi-x|^{\Delta-1}$; $x\in(\pi-1,\pi)$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{=\,g(x)}$

zjevně $g(x)\in L(0,\pi)$; neboť $\Delta-1>-1$

$\Rightarrow F(a)\in C([0,2-\Delta))$

---

celkem: $F(a)\in C((-K,2-\Delta))$; $\forall K,\Delta>0$

$\Rightarrow F(a)\in C((-\infty,2))$; neboť $(-\infty,2)=\bigcup_{K,\Delta>0}(-K,2-\Delta)$.

(B4) $f(a,x)=\sqrt{x^2+a^2}$; $a\in I=\mathbb{R}$; $J=(-1,1)$.

zde $I_K:=(-K,K)$; $K>0$ zvené; (konstantní) majoranta $g(x)=\sqrt{1+K^2}$

$\Rightarrow F(a)\in C(I_K) \Rightarrow F(a)\in C(\mathbb{R})$; neboť $\mathbb{R}=\bigcup_K I_K$.

(B5) $f(a,x)=\exp(-ax)\dfrac{\sin x}{x}$; $a\in I=(0,\infty)$; $J=(0,\infty)$

... $I_\Delta=(\Delta,+\infty)$ ... majoranta $g(x)=\exp(-\Delta x)$;

díky odhadu $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\le 1 \ \forall x>0$.

$\Rightarrow F(a)$ spojité v I_Δ a tedy v $(0,\infty)=\bigcup_{\Delta>0} I_\Delta$

(B6) $f(a,x)=\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x(a+x)^2}$; $a\in I=(-1,\infty)$;

-- zde $I_\Delta=(-1+\Delta,\infty)$; tj. $a+x\ge -1+\Delta+x>\Delta$

pro $x\in(1,+\infty)=:J$

nebolí $|f(a,x)|\le\dfrac{|\sin\frac{1}{x}|}{x\cdot\Delta^2}=:g(x)$; $\forall x\in J$

$g(x)\in L(1,\infty)$ -- snadné, neboť $|\sin\frac{1}{x}|\le|\frac{1}{x}|=\frac{1}{x}$

tj. $g(x)\le\dfrac{1}{x^2\Delta^2}\in L(1,\infty)$.

$\Rightarrow F(a)\in C(I_\Delta)$ a tedy $\in C(-1,\infty)$.

pro $\forall\Delta>0$